Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Stochastik
JProf. Dr. Luitgard Veraart · Daniel Gentner

Finanzmathematik in stetiger Zeit (SS 2010)

Übungsblatt 7 und 8

Aufgabe 1 (FV-Prozesse und quadratische Kovariationsprozesse)

(i) Wir wissen bereits, dass der quadratische Variationsprozess eines FV-Prozesses $\tilde{A}$ der Nullprozess ist (Übungsblatt 3, Aufgabe 1), d.h. $\left\langle \tilde{A} \right\rangle_t \equiv 0, \quad t \geq 0$. Sei nun X ein stetiges Semimartingal mit eindeutig bestimmter Zerlegung $X_t = X_0 + M_t + A_t$ in Startwert, stetiges lokales Martingal und stetigen FV-Prozess. In der Vorlesung wurde *definiert*

$$\langle X \rangle := \langle M \rangle .$$

Aus dieser Definition ergibt sich sofort die in der Vorlesung oft verwendete Eigenschaft $\left\langle X + \tilde{A} \right\rangle = \langle X \rangle$. Ferner wurde für zwei Semimartingale X, Y der quadratische Kovariationsprozess *definiert* als

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2}(\langle X + Y \rangle - \langle X \rangle - \langle Y \rangle).$$

Eine direkte Konsequenz dieser Definition ist dann wiederum $\left\langle X, \tilde{A} \right\rangle_t = 0, \quad t \geq 0$. Zeigen Sie nun, dass diese Definitionen sinnvoll sind, indem Sie beweisen, dass für Partitionen $\mathcal{Z}_n$ von $[0, t]$ mit $\delta(\mathcal{Z}_n) \to 0$ gilt, dass

$$T^{\mathcal{Z}_n}(X)_t \xrightarrow{\mathbb{P}} \langle M \rangle_t .$$

(ii) Zeigen Sie ferner, dass für einen Prozess $(f_t(\omega))_t$ mit der Eigenschaft, dass zu jedem $t > 0$ eine Zufallsvariable $C(\omega)$ mit

$$f_s(\omega) \leq C(\omega), \quad 0 \leq s \leq t,$$

existiert, das zufällige Lebesgue-Stieltjes-Integral

$$(\omega, t) \mapsto \int_0^t f_s(\omega) dA_s(\omega)$$

wieder ein FV-Prozess ist. (Bemerken Sie, dass diese Bedingung sowohl Prozesse $f_s(\omega)$ mit stetigen Pfaden, als auch beschränkte Prozesse zulässt).

Lösung:
(i) Es ist

$$\begin{aligned}
T_t^{\mathcal{Z}_n}(X) &= T_t^{\mathcal{Z}_n}(M + A) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} ((M_{t_{i+1}} + A_{t_{i+1}}) - (M_{t_{i+1}} + A_{t_{i+1}}))^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 + 2(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(A_{t_{i+1}} - A_{t_i}) + (A_{t_{i+1}} - A_{t_i})^2 \right\}
\end{aligned}$$

und also

$$
\begin{aligned}
T_t^{\mathcal{Z}_n}(X) = &\sum_{i=1}^{n-1}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1} 2(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(A_{t_{i+1}} - A_{t_i}) \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1}(A_{t_{i+1}} - A_{t_i})^2.
\end{aligned}
$$

Der Term in der ersten Zeile konvergiert bekanntlich in Wahrscheinlichkeit gegen $\langle M\rangle_t$ für $\delta(\mathcal{Z}_n) \to 0$, der Term in der letzten bekanntlich gegen 0 (ÜB3, A1). Genügt also z.z., dass der Term in der zweiten Zeile in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert. Dies ist aber sogar ω-weise der Fall, denn da $M(\omega)$ stetig ist (und also gleichmäßig stetig auf $[0, t]$) können wir zu $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ wählen, so dass aus $\delta(\mathcal{Z}_n) < \delta$ folgt, dass

$$|M_{t_{i+1}}(\omega) - M_{t_i}(\omega)| < \frac{\epsilon}{V_{[0,t]}A(\omega)}, \quad i \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Damit folgt aber

$$\sum_{i=1}^{n-1} |M_{t_{i+1}}(\omega) - M_{t_i}(\omega)||A_{t_{i+1}}(\omega) - A_{t_i}(\omega)| \leq \epsilon.$$

(ii) Sei $\mathcal{Z}_n$ eine Zerlegung von $[0, t]$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
V_{\mathcal{Z}_n} \int_0^t f_s(\omega) dA_s(\omega) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_s(\omega) dA_s(\omega) \right| \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_s(\omega) dV_{[0,s]}A(\omega) - \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_s(\omega) d(V_{[0,s]}A(\omega) - A_s(\omega)) \right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_s(\omega) dV_{[0,s]}A(\omega) \right| + \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_s(\omega) d(V_{[0,s]}A(\omega) - A_s(\omega)) \right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |f_s(\omega)| dV_{[0,s]}A(\omega) + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |f_s(\omega)| d(V_{[0,s]}A(\omega) - A_s(\omega)) \\
&= \int_0^t |f_s(\omega)| dV_{[0,s]}A(\omega) + \int_0^t |f_s(\omega)| d(V_{[0,s]}A(\omega) - A_s(\omega)) \\
&\leq C(\omega)(V_{[0,t]}A(\omega) + V_{[0,t]}A(\omega) - A_t(\omega)) + A_0(\omega)) < \infty.
\end{aligned}
$$

Da die gefundene obere Schranke nicht mehr von der gewählten Partition abhängt, liefert Supremumsbildung über alle Partitionen von $[0, t]$ die Behauptung (die càdlàg-Eigenschaft folgt aus der offensichtlichen Stetigkeit).

Aufgabe 6 (Beispiele von Martingaldarstellungen)

Sei W eine Standard-Brownsche Bewegung. Finden Sie für die folgenden Zufallsvariablen $F \in L^2$ jeweils passende Prozesse $H \in L^2_W[0, T]$, so dass die Darstellung

$$F = \mathbb{E}F + \int_0^T H_s dW_s$$

gilt:
1.) $F = W_T$, 2.) $F = \int_0^T W_s ds$ 3.) $F = W_T^2$, 4.) $F = W_T^3$.

Lösung: 1.) $H(s,\omega) := 1, 0 \le s \le T, \omega \in \Omega$ leistet das Gewünschte, denn es gilt

$$\int_0^t dW_s = W_t$$

(Itô-Formel für $f(x) = x$).
2.) Hier ist $\mathbb{E}F = 0$ (Fubini). Wir betrachten die zeitabhängige Itô-Formel für $X = W$ (Brownsche Bewegung):

$$f(W_t, t) - f(W_0, 0) = \int_0^t f_x(W_s, s) dW_s + \int_0^t f_t(W_s, s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(W_s, s) ds$$

versuchen, das 2. Integral auf die gewünschte Form zu bringen. Wir benötigen daher eine Funktion f mit $f_t(x,t) = x$. Setze naheliegend $f(x,t) = xt$. Dann folgt

$$tW_t = \int_0^t s dW_s + \int_0^t W_s ds + 0$$

und also

$$F = \int_0^T W_s ds = TW_T - \int_0^T s dW_s = \int_0^T (T - s) dW_s.$$

$H(\omega, s) := T - s$ leistet also das Gewünschte.
3.) Hier ist $\mathbb{E}W_T^2 = T$. Wegen

$$\int_0^T W_s dW_s = \frac{1}{2}(W_T^2 - T)$$

folgt

$$W_T^2 = T + \int_0^T 2W_s dW_s,$$

und $H(\omega, s) := 2W_s(\omega)$ leistet also das Gewünschte.
4.) Es gilt $\mathbb{E}W_T^3 = 0$. Wir wenden die Itô-Formel auf $f(x) = x^3$ an und erhalten

$$W_T^3 = \int_0^T 3W_s^2 dW_s + \frac{1}{2} \int_0^T 6W_s ds.$$

Nach 2.) ist die rechte Seite hier aber gleich

$$\int_0^T 3(W_s^2 + T - s) dW_s$$

und $H(\omega, s) := 3(W_s^2 + T - s)$ leistet das Gewünschte.