Finanzmathematik in stetiger Zeit (SS 2010)

Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (Äquivalentes Martingalmaß impliziert No-Arbitrage)
Sei $\mathcal{M}$ ein Finanzmarktmodell mit $\tilde{Q}^* \neq \emptyset$, es existiere also ein äquivalentes Martingalmaß. Zeigen Sie, dass es keine Arbitragemöglichkeiten geben kann.

Aufgabe 2 (Verdopplungsstrategie in stetiger Zeit mit endlichem Zeithorizont)
Es sei $\mathcal{M}$ ein Finanzmarkt mit endlichem Zeithorizont $T > 0$, bestehend aus einem risikolosen Bond mit festem Zinssatz 0 und einer Aktie, deren Preisprozess S nur durch eine Brownsche Bewegung getrieben wird (ohne deterministischen Drift), d.h.

$$dS_t = S_t(0 \cdot dt + dW_t) = S_t dW_t,$$

bzw. explizit $S_t = S_0 \exp(W_t - \frac{1}{2}t)$.

(a) Wir definieren

$$I(t) := \int_0^t \frac{1}{\sqrt{T-u}} dW_u.$$

Berechnen Sie $\langle I \rangle_t$ und finden Sie eine Funktion $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, so dass $I(f(t))$ eine Brownsche Bewegung ist (Satz von Levi!). Folgern Sie, dass für beliebiges $\alpha > 0$ für die Stoppzeit

$$\tau_\alpha := \inf_{t \in [0,T)} \{t > 0 : I(t) = \alpha\} \wedge T$$

gilt, dass $\mathbb{P}(\tau_\alpha < T) = 1$.

(b) Wir betrachten die Handelsstrategie $\varphi(t) := (\varphi_0(t), \varphi_1(t))$ mit

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{S_t \sqrt{T-t}} \mathbf{1}\{t \leq \tau_\alpha\}, \quad t \in [0,T]$$
$$\varphi_0(t) = \frac{1}{B_t}(I(t \wedge \tau_\alpha) - \varphi_1(t) S_t), \quad t \in [0,T].$$

Zeigen Sie, dass

$$I(t \wedge \tau_\alpha) = \int_0^t \varphi_1(u) dS_u$$

gilt und geben Sie eine qualitative Beschreibung, wie sich ein Investor nach dieser Strategie zu jedem Zeitpunkt $t \in [0,T]$ zu verhalten hat.

(c) Zeigen Sie, dass φ selbstfinanzierend ist mit $V^\varphi(0) = 0$ (d.h. es wird kein Startkapital benötigt) und dennoch $V^\varphi(T) = \alpha$ $\mathbb{P}$-f.s. (d.h. wir erhalten sicher einen Vermögenszuwachs von α nach T Zeiteinheiten).

(d) Begründen Sie, weshalb G^φ nicht f.s. nach unten beschränkt sein kann (temporär müssen also beliebig große Verluste bei dieser Strategie in Kauf genommen werden).

Aufgabe 3 (Beispiel einer zahmen Arbitragestrategie)
Wir betrachten einen Finanzmarkt mit Zeithorizont $T = 1$, einem unverzinsten Bond B_t und einer Aktienanlagemöglichkeit, deren Preisprozess gegeben ist durch

$$dS_t = S_t(\frac{1}{Q_t}dt + dW_t),$$

wobei W eine Brownsche Bewegung und Q ein Besselprozess ist, mit Dynamik

$$dQ_t = \left(\frac{1}{Q_t} - 2\right)dt + dW_t, \quad Q_0 = 1.$$

(a) Gegeben sei die Handelsstrategie

$$\varphi(t) := (\varphi_0(t), \varphi_1(t)) \equiv (\varphi_0(t), 1/S(t)).$$

Bestimmen Sie den zugehörigen Gewinnprozess. Bestimmen Sie anschließend φ_0 so, dass φ selbstfinanzierend ist mit $V^\varphi(0) = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass dieses φ zwar nicht regulär, aber im folgenden Sinne *zahm* ist: es gibt ein $K > 0$ mit

$$V^\varphi(t) > -K, \quad t \in [0, 1].$$

Beweisen Sie, dass φ eine (nicht reguläre, aber zahme) Arbitragestrategie ist.

(c) Existiert ein äquivalentes Martingalmaß in diesem Finanzmarktmodell?

Aufgabe 4 (Diskontieren und Arbitrage)

(i) Zeigen Sie, dass ein Markt $(S_0, S_1, \dots, S_n)$ genau dann Arbitrage zulässt, wenn dies der diskontierte Markt $(1, \tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_n)$ mit $\tilde{S}_i := S_i/S_0, i = 1, ..., n$ auch tut.

(ii) Wir betrachten einen diskontierten Markt $(1, \tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_n)$. Zeigen Sie, dass hier genau dann eine zahme (s. Aufgabe 3) Arbitragemöglichkeit existiert, falls eine selbstfinanzierende und zahme Handelsstrategie existiert mit

$$\tilde{V}^\varphi(0) \leq \tilde{V}^\varphi(T), \quad \text{f.s.} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(\tilde{V}^\varphi(T) - \tilde{V}^\varphi(0) > 0) > 0.$$

(In diskontierten Märkten spielt die Bedingung $V^\varphi(0) = 0$ also keine wesentliche Rolle für die Existenz von Arbitrage.)