Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Stochastik
JProf. Dr. Luitgard Veraart · Daniel Gentner

Finanzmathematik in stetiger Zeit (SS 2010)

Lösungen zu Übungsblatt 9

Aufgabe 3 (Beispiel einer zahmen Arbitragestrategie)
Wir betrachten einen Finanzmarkt mit Zeithorizont $T = 1$, einem unverzinsten Bond B_t und einer Aktienanlagemöglichkeit, deren Preisprozess gegeben ist durch

$$dS_t = S_t(\frac{1}{Q_t}dt + dW_t),$$

wobei W eine Brownsche Bewegung und Q ein Besselprozess ist, mit Dynamik

$$dQ_t = \left(\frac{1}{Q_t} - 2\right)dt + dW_t, \quad Q_0 = 1.$$

(a) Gegeben sei die Handelsstrategie

$$\varphi(t) := (\varphi_0(t), \varphi_1(t)) \equiv (\varphi_0(t), 1/S(t)).$$

Bestimmen Sie den zugehörigen Gewinnprozess. Bestimmen Sie anschließend φ_0 so, dass φ selbstfinanzierend ist mit $V^\varphi(0) = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass dieses φ zwar nicht regulär, aber im folgenden Sinne *zahm* ist: es gibt ein $K > 0$ mit

$$V^\varphi(t) > -K, \quad t \in [0, 1].$$

Beweisen Sie, dass φ eine (nicht reguläre, aber zahme) Arbitragestrategie ist.

(c) Existiert ein äquivalentes Martingalmaß in diesem Finanzmarktmodell?

Lösung:

(a) Da B_t unverzinst ist, gilt $B_t = 1$, insbesondere $dB_t = 0$. Für $\varphi(t) = (\varphi_0(t), \varphi_1(t)) = (\varphi_0(t), 1/S(t))$ gilt also

$$G^\varphi(t) = \int_0^t \varphi_0(u)dB_u + \int_0^t \varphi_1(u)dS_u = 0 + \int_0^t \frac{1}{S_u}S_u(\frac{1}{Q_u}du + dW_u) = \int_0^t \frac{1}{Q_u}du + W_t.$$

Wir erhalten also

$$dG_t^\varphi = \frac{1}{Q_t}dt + dW_t, \quad G^\varphi(0) = 0.$$

Die in der Vorlesung behandelte Lösungstheorie zu SDGLs deckt diese Gleichung nicht ab. Durch scharfes Hinsehen (bzw. Spielen mit der zeitabhängigen Itôformel) kann die Lösung jedoch ermittelt werden:

$$G_t^\varphi = Q_t + 2t - 1, \quad t \in [0, 1].$$

Zur Kontrolle wenden wir die zeitabhängige Itô-Formel auf $f(x,t) = x + 2t - 1$ an und erhalten

$$\begin{aligned} dG_t^\varphi &= df(Q_t, t) = f_x(Q_t, t)dQ_t + f_t(Q_t, t)dt + \frac{1}{2} f_{xx}(Q_t, t)d\langle Q\rangle_t \\ &= 1dQ_t + 2dt + 0 = (\frac{1}{Q_t} - 2)dt + dW_t + 2dt = \frac{1}{Q_t}dt + dW_t. \end{aligned}$$

Es ist

$$V_t^\varphi = \varphi_0(t)B_t + \varphi_1(t)S_t = \varphi_0(t) + 1.$$

Damit φ selbstfinanzierend ist, muss gelten

$$V_t^\varphi = V_0^\varphi + G_t^\varphi,$$

was offenbar äquivalent ist zu

$$\varphi_0(t) = \varphi_0(0) + Q_t + 2t - 1.$$

Ferner gilt $V^\varphi(0) = 0$ genau dann wenn $\varphi_0(0) = -1$ ist. Das gesuchte φ ergibt sich damit zu

$$\varphi(t) = \left(Q_t + 2t - 2, \frac{1}{S(t)}\right).$$

(b) Wegen $Q_t \geq 0$ f.s. folgt

$$G_t^\varphi = Q_t + 2t - 1 \geq -1, \quad t \in [0,1]$$

und wegen der Selbstfinanzierungseigenschaft also

$$V_t^\varphi = V^\varphi(0) + G^\varphi(t) \geq -1.$$

φ ist also zahm im Sinne der Aufgabenstellung mit $K = -1$. Wegen $V^\varphi(0) = 0$, jedoch

$$V^\varphi(1) = 0 + G^\varphi(1) = Q_1 + 2 - 1 \geq 1$$

ist φ eine (zwar nicht reguläre aber eben zahme) Arbitragestrategie.

(c) In Aufgabe 1 haben wir gesehen, dass es ein solches Maß nicht geben kann, wenn eine Arbitragestrategie existiert. Die Regularität hat im Beweis keine Rolle gespielt, nur die Werte von V_t^φ bei $t = 0$ und $t = T$. Damit kann man mit dem selben Argument zeigen, dass hier kein äquivalentes Martingalmaß existieren kann.

Aufgabe 4 (Diskontieren und Arbitrage)

(i) Zeigen Sie, dass ein Markt $(S_0, S_1, \dots, S_n)$ genau dann Arbitrage zulässt, wenn dies der diskontierte Markt $(1, \tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_n)$ mit $\tilde{S}_i := S_i/S_0, i = 1, ..., n$ auch tut.

(ii) Wir betrachten einen diskontierten Markt $(1, \tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_n)$. Zeigen Sie, dass hier genau dann eine zahme (s. Aufgabe 3) Arbitragemöglichkeit existiert, falls eine selbstfinanzierende und zahme Handelsstrategie existiert mit

$$\tilde{V}^\varphi(0) \leq \tilde{V}^\varphi(T), \quad \text{f.s.} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(\tilde{V}^\varphi(T) - \tilde{V}^\varphi(0) > 0) > 0.$$

(In diskontierten Märkten spielt die Bedingung $V^\varphi(0) = 0$ also keine wesentliche Rolle für die Existenz von Arbitrage.)

Lösung:

(a) Die Selbstfinanzierungseigenschaft einer Handelsstrategie φ liegt nach dem Numéraire-Invarianz-Theorem genau dann vor, wenn sie in jedem diskontierten Markt vorliegt. Dies gilt auch für die Regularitätseigenschaft, denn $V^{\varphi}(t) \geq 0, t \in [0,T]$ genau dann wenn $\tilde{V}^{\varphi}(t) \geq 0, t \in [0,T]$ denn ein Bond ist stets strikt positiv. Die Eigenschaften

$$V^{\varphi}(0) = 0, \quad \mathbb{P}(V^{\varphi}(T) > 0) > 0$$

gelten aus dem selben Grund genau dann wenn

$$\tilde{V}^{\varphi}(0) = 0, \quad \mathbb{P}(\tilde{V}^{\varphi}(T) > 0) > 0.$$

(b) Ist φ eine zahme Arbitragestrategie, so hat diese offensichtlich alle geforderten Eigenschaften. Sei nun umgekehrt φ eine selbstfinanzierende und zahme Strategie mit

$$\tilde{V}^{\varphi}(0) \leq \tilde{V}^{\varphi}(T), \quad \text{f.s.} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(\tilde{V}^{\varphi}(T) - \tilde{V}^{\varphi}(0) > 0) > 0.$$

Wir definieren eine Strategie ψ vermöge

$$\psi_i(t) = \varphi_i(t), \quad i = 1, ..., n, t \in [0,T]$$

und wählen $\psi_0(0)$ so, dass $V^{\psi}(0) = 0$ (d.h. $\psi_0(0) = -\sum_{i=1}^{n} \psi_i(0)\tilde{S}_i(0)$) und $\psi_0(t)$ so, dass ψ selbstfinanzierend ist, was genau dann der Fall ist, wenn

$$\psi_0(t) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t)\tilde{S}_i(t) = V^{\psi}(0) + \int_0^t \psi_0(t)d1 + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \psi_i(u)d\tilde{S}_i(u),$$

(an dieser Stelle wird klar, weshalb die Normierung wesentlich für das Argument ist) also wenn

$$\psi_0(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^t \psi_i(u)d\tilde{S}_i(u) - \psi_i(t)\tilde{S}_i(t) \right).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} V^{\psi}(t) &= V^{\psi}(0) + \int_0^t \psi_0(u)d1 + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \psi_i(u)d\tilde{S}_i(u) \\ &= 0 + 0 + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \varphi_i(u)d\tilde{S}_i(u) = G^{\varphi}(t) \\ &= V^{\varphi}(t) - V^{\varphi}(0). \end{aligned}$$

Damit ist auch ψ zahm und eine Arbitragestrategie, da selbstfinanzierend mit $V^{\psi}(0) = 0$ und

$$\mathbb{P}(\tilde{V}^{\psi}(T) > 0) > 0.$$