Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Stochastik
JProf. Dr. Luitgard Veraart · Daniel Gentner

Finanzmathematik in stetiger Zeit (SS 2010)

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (Martingalmaße und Vollständigkeit im Black-Scholes-Markt)
Wir betrachten den Black-Scholes-Markt $\mathcal{M}^{BS}$. Zeigen Sie:

(a) Die Existenz eines eindeutig bestimmten äquivalenten lokalen Martingalmaßes für $\tilde{S}$ ist äquivalent zu den Parameterbedingungen $n = d$ und Volatilitätsmatrix $\sigma(t, \omega)$ $\lambda \otimes \mathbb{P}$-f.ü. regulär.

(b) Die Parameterbedingungen $n = d$ und Volatilitätsmatrix $\sigma(t, \omega)$ $\lambda \otimes \mathbb{P}$-f.ü. regulär implizieren die Vollständigkeit von $\mathcal{M}^{BS}$, im Sinne dass ein äquivalentes lokales Martingalmaß $\mathbb{Q}^*$ existiert, so dass jeder Zahlungsanspruch X mit $X/B(T) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{Q}^*)$ durch eine $\mathbb{Q}^*$-zulässige Handelsstrategie φ replizierbar ist (d.h. $V^\varphi(T) = X$).

Aufgabe 2 (etwas Lineare Algebra zum Beweis von Satz 4.2.2)
Zeigen Sie, dass für eine Martix $A \in \mathbb{R}^{d\times n}$ gilt, dass

$$\text{Kern}(A^t)^\perp = \text{Bild}(A).$$

Aufgabe 3 (Die Greeks)
Sei $C^{BS}(t)$ für festes t mit $0 \leq t \leq T$ der Black-Scholes-Preis einer europäischen Call Option im klassischen Black-Scholes-Markt. Dieser hängt von den Modellparametern σ und r ab (nicht jedoch vom deterministischen Drift μ der Aktiendynamik!), vom aktuellen Preis $S := S(t)$ der Aktie, von der Zeit $T - t$ bis zum Stichzeitpunkt T der Option und vom Strike-Preis K, d.h.

$$C^{BS}(t) = C(\sigma, r, S, T - t).$$

Berechnen Sie die Sensitivitäten des Black-Scholes-Preises bezüglich dieser Parameter, indem Sie jeweils die partiellen Ableitungen berechnen. In der Literatur haben diese jeweils fest zugeordnete griechische Buchstaben, weshalb man sie auch als die *Greeks* bezeichnet:

$$\Delta := \frac{\partial C}{\partial S}, \quad \mathcal{V} := \frac{\partial C}{\partial \sigma}$$
$$\theta := \frac{\partial C}{\partial T}, \quad \rho := \frac{\partial C}{\partial r}.$$

Aufgabe 4 (Call-Put-Parität und Bestimmung des europäischen Puts im Black-Scholes Markt)
Wir betrachten einen Markt mit einem konstant verzinstem Bond B ($r(t) \equiv r$) und einer Aktienanlage S. Wir betrachten die fairen No-Arbitragepreise zum Zeitpunkt t eines Calls mit Preis $C(t)$ und Puts mit Preis $P(t)$ auf die selbe Aktie S mit identischer Stichzeit T und identischem Strikepreis K.

(a) Zeigen Sie
$$S(t) + P(t) - C(t) = Ke^{-r(T-t)}.$$

(b) Leiten Sie im klassischen Black-Scholes-Markt den fairen Preis eines euopäischen Puts ab mit Hilfe der Call-Formel der Vorlesung und Teil (a).

Hinweis zu (a): Nehmen Sie folgende Perspektive ein: Sie besitzen eine Aktie, einen Put und sind *selbst* der Emittent einer Call Einheit (Sie haben diese selbst ausgeschrieben und verkauft), sind also in einer sogenannten Short-Position zu diesem Call. Berechnen Sie zu diesem Portfolio $V(T)$ und benutzen Sie die No-Arbitrageannahme.