Finanzmathematik in stetiger Zeit (SS 2010)

Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (Optionen auf zwei Aktien)

Legen Sie einen vollständigen Black-Scholes Markt mit Bond und zwei Aktien zu Grunde und betrachten Sie die folgenden Europäischen Optionen auf die bessere bzw. schlechtere Aktie:

$$\begin{aligned} H_C^{\max} &:= \left(\max\left\{S_T^{(1)}, S_T^{(2)}\right\} - K\right)^+ && \textbf{(Call auf Maximum)} \\ H_C^{\min} &:= \left(\min\left\{S_T^{(1)}, S_T^{(2)}\right\} - K\right)^+ && \textbf{(Call auf Minimum)} \\ H_P^{\max} &:= \left(K - \max\left\{S_T^{(1)}, S_T^{(2)}\right\}\right)^+ && \textbf{(Put auf Maximum)} \\ H_P^{\min} &:= \left(K - \min\left\{S_T^{(1)}, S_T^{(2)}\right\}\right)^+ && \textbf{(Put auf Minimum)} \end{aligned}$$

Alle Marktparameter seien konstant. Bestimmen Sie faire Preise für diese Optionen zur Zeit $t = 0$.
Hinweis: Für zwei unabhängige Zufallsvariablen $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ und $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ unter einem Maß $\mathbb{Q}$ und beliebige Zahlen $\alpha, \beta, \hat{x} \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$ und $Z := Y - \alpha X$ gilt

$$(X, Z) \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \mu \\ -\alpha\mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^2 & -\alpha\sigma^2 \\ -\alpha\sigma^2 & 1 + \alpha^2\sigma^2 \end{pmatrix}\right),$$

$$\mathbb{Q}\left(X \geq \hat{x},\ Z \leq \beta\right) = \mathbb{Q}\left(X \geq \hat{x},\ Y \leq \alpha X + \beta\right) = \int_{\hat{x}}^{\infty} \varphi_{\mu,\sigma^2}(x)\Phi(\alpha x + \beta)dx.$$

Dabei ist φ_{μ,σ^2} Dichte einer $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariable und Φ Verteilungsfunktion von $\mathcal{N}(0, 1)$.

Aufgabe 2 (Aktien mit Dividende)

Betrachten Sie das klassische Black-Scholes Modell mit einem Bond, einer Aktie mit Preisprozess S und konstanten Parametern. Die Aktie schütte (zeitstetig) den Anteil $a \in \mathbb{R}$ des aktuellen Kurswertes als Dividende aus. In diesem Fall gilt die SDGL

$$dS_t = S_t\left((\mu - a)\,dt + \sigma dW_t\right)$$

für die Aktienkursdynamik. Bestimmen Sie in diesem Modell den Preis eines Europäischen Calls mit Strike K zum Periodenende T auf S.

Aufgabe 3 (Spiegelungsprinzip)

Sei $W := (W_t)_{t\geq 0}$ eine $\mathbb{P}$-Brownsche Bewegung und $M_t := \max\{W_s : 0 \leq s \leq t\}$ das laufende Maximum. Zeigen Sie Satz 4.6.1 der Vorlesung: Sind $m, w \in \mathbb{R}$, $w \leq m$, $0 < m$, gilt für alle $t > 0$

(a) $\mathbb{P}(M_t \geq m,\ W_t \leq w) = \mathbb{P}(W_t \geq 2m - w)$, (das **Spiegelungsprinzip**)

(b) die gemeinsame Dichte f_{M_t,W_t} ist gegeben durch

$$f_{M_t,W_t}(m,w) = \frac{2\,(2m-w)}{t\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(2m-w)^2}{2t}\right) \mathbf{1}\{w \leq m, 0 \leq m\}$$

(c) und für $\alpha \in \mathbb{R}$, $\bar{W}_t := \alpha t + W_t$, $\bar{M}_t := \max\{\bar{W}_s : 0 \leq s \leq t\}$, $t \geq 0$, ist die gemeinsame Dichte $f_{\bar{W}_T,\bar{M}_T}$ der Endwerte gegeben durch

$$f_{\bar{M}_T,\bar{W}_T}(m,w) = \frac{2\,(2m-w)}{T\sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{(2m-w)^2}{2T}\right) \exp\left(\alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T\right) \mathbf{1}\{w \leq m, 0 \leq m\}.$$

Hinweis zu Teil (c): Wechseln Sie zunächst auf ein Maß $\bar{\mathbb{P}}$, unter dem $\bar{W}$ eine Brownsche Bewegung ohne Drift ist, und wenden Sie dann Teil (b) an.

Aufgabe 4 (Down-and-out Call)

Bewerten Sie im Black-Scholes Modell mit einer Aktie S, Strike $K \geq 0$ und Barriere $B \geq K$ zur Zeit $t = 0$ den **Down-and-out Call** mit Auszahlung

$$H_C^{d\&o} := (S_T - K)^+ \mathbf{1}_{B \leq \min\{S_t :\ 0 \leq t \leq T\}}.$$

Hinweis: Schreiben Sie $B = S_0 e^b$ für ein geeignetes b und arbeiten Sie von Anfang an unter dem risikoneutralen Maß. Betrachten Sie den Übergangskern einer (allgemeinen) Brownschen Bewegung und leiten Sie mit dem Spiegelungsprinzip aus Aufgabe 3 die Dichte einer bei Unterschreiten der Barriere annulierten Brownschen Bewegung her.