Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Stochastik
JProf. Dr. Luitgard Veraart · Daniel Gentner

Finanzmathematik in stetiger Zeit (SS 2010)

Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (Das Finanzmarktmodell von Bachelier)

Diese Aufgabe befasst sich mit dem Finanzmarktmodell von Bachelier.[1] Wir wollen die in der Vorlesung am Black-Scholes Modell erlernte finanzmathematische Analyse daran erproben. Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, eine $\mathbb{P}$-Brownsche Bewegung W mit natürlicher Filtration $(\mathcal{F})$ und einen festen Zeithorizont $T > 0$. Wir betrachten einen Bond und eine Aktie:

$$\begin{aligned} dB_t &= rB_t dt, \\ dS_t &= \mu dt + \sigma dW_t. \end{aligned}$$

Verzinsung r, Drift μ und Volatilität σ sind hier konstant, letztere ist größer Null.

- Worin besteht der Unterschied zum Black-Scholes Modell mit einer Aktie? Was für einen Effekt hat das auf den möglichen Aktienpreis?
- Lösen Sie die SDGLs und bestimmen Sie ein risikoneutrales Maß $\mathbb{Q}$ sowie die zugehörige $\mathbb{Q}$-Brownsche Bewegung $\tilde{W}$, unter dem (S_t/B_t) ein Martingal ist.
- Stellen Sie S als SDGL bezüglich des risikoneutralen Maßes dar.

Wie im Black-Scholes Modell kann man auch hier Europäische Optionen handeln. Die Auszahlung eines Europäischen Calls mit Strike K und Fälligkeit T auf S ist wie gewohnt $H_C = (S_T - K)^+$, die des entsprechenden Puts $H_P = (K - S_T)^+$.

- Nehmen Sie zunächst $r = 0$ an und bestimmen Sie den Preis des Calls zur Zeit $t \in [0, T]$.
- Bestimmen Sie ebenso den Preis des Puts zu den gleichen Parametern.

Zur Kontrolle: Sie sollten für den Call den Preis

$$C_t := \pi_t(H_C) = \sigma\sqrt{T-t}\varphi\left(d(S_t, T-t)\right) + (S_t - K)\,\Phi\left(d(S_t, T-t)\right)$$

mit φ bzw. Φ Dichte bzw. Verteilungsfunktion von $\mathcal{N}(0,1)$ und $d(s,t) := (s-K)/(\sigma\sqrt{t})$ erhalten.

- Welche Startpreise für Call und Put sind bei $r \neq 0$ fair?

Als nächstes wollen wir allgemeinere Zahlungsansprüche vom Europäischen Typ hedgen. Sei dazu $H = H(S_T) : \Omega \to \mathbb{R}$ ein Zahlungsanspruch, dessen Auszahlung nur vom Endkurs abhängt. Wir nehmen an, dass wir zu jeder Zeit $t \in [0, T]$ den fairen Preis $\pi_t(H) = (B_t/B_T)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H|\mathcal{F}_t]$ kennen und setzen $G(t, S_t) := \pi_t(H)/B_t$.

[1] Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier (geboren am 11. März 1870 in Le Havre, gestorben am 28. April 1946 in Saint-Servan-sur-Mer) hat im Jahr 1900 als erster einen Finanzmarkt mit Hilfe einer Brownschen Bewegung modelliert. Die Originalarbeit ist [Théorie de la spéculation", Annales Scientifiques de l'école Normale Supérieure 3 (17)] und steht kostenlos online zur Verfügung.

- Finden Sie eine Hedgingstrategie $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1)$ für H. Sie können sich am Vorgehen zum Hedgen im Black-Scholes Markt (Kapitel 4.5 der Vorlesung) orientieren. Verwenden Sie den Satz von Feynman-Kac, um eine Darstellung von G als $\mathbb{Q}$-Martingal zu erhalten.

Zum Abschluss der Untersuchungen wollen wir einen Blick auf die Greeks im Bachelier-Markt werfen. Wir nehmen zur Vereinfachung wieder $r = 0$ an und erinnern in der Notation $C_t(s, \tau, K, \sigma)$ bzw. $P_t(s, \tau, K, \sigma)$ mit Aktienpreis $s = S_t$, Restlaufzeit $\tau = T - t$, Strike K und Volatitlität σ an die Abhängigkeit dieser Preise von den Marktparametern.

- Bestimmen Sie die Sensitivität des Call- und Put-Preises bezüglich
  - Aktienpreis (Delta),
  - Restlaufzeit (Theta),
  - Volatilität (Vega) und
  - Strike (Kappa[2]).
- Welche Vorzeichen tragen die einzelnen Sensitivitäten? Was fällt Ihnen beim Vergleich mit dem Black-Scholes Modell auf?

Nachdem Sie den Bachelier-Markt nun näher kennengelernt haben, verfügen Sie über gute Argumente, die letzten zwei Fragen zu beantworten:

- Ist der Bachelier-Markt arbitragefrei?
- Ist er vollständig und, falls ja, bezogen auf welche Zahlungsansprüche?

[2] Für die Sensitivität der Europäischen Optionen bezüglich des Strikes ist keine Bezeichnung allgemein verbreitet. Das hat etwas damit zu tun, dass man diese Sensitivität eigentlich schon unter einem anderen Namen kennt. . .