Aufgabe 3 (Stoppzeiten)

(a) Es sei τ eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$ und $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration auf $\mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass τ eine Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ ist genau dann wenn $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(b) Sei τ nun eine reellwertige $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-Stoppzeit. Bekanntlich modelliert die σ-Algebra $\mathcal{F}_t$ all diejenigen Ereignisse, zu welchen am Zeitpunkt t entschieden werden kann, ob sie eingetreten sind oder nicht. Analog definieren wir

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t, t \in I\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}_\tau$ eine σ-Algebra ist und begründen Sie die Zweckmäßigkeit dieser Definition.

Im Weiteren seien τ, σ reellwertige Stoppzeiten bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$.

(c) $\tau \wedge \sigma := \min\{\tau, \sigma\}$, $\tau \vee \sigma := \max\{\tau, \sigma\}$ und $\tau + \sigma$ sind wieder Stoppzeiten bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$.

(d) Aus $\tau \le \sigma$ folgt $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$.

(e) Aus $A \in \mathcal{F}_\tau$ folgt $A \cap \{\tau \le \sigma\} \in \mathcal{F}_\sigma$.

Lösung:

(a) Sei τ Stoppzeit in $\mathbb{N}_0$, d.h. gelte $\{\tau \le n\} \in \mathcal{F}_n$. Dann ist

$$\{\tau = n\} = \{\tau \le n\} \setminus \{\tau \le n-1\} \in \mathcal{F}_n$$

wegen $\mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n$. Gelte umgekehrt $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$\{\tau \le n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_n$$

wegen $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$ für $k \le n$.

(b) Die Zweckmäßigkeit der Definition erklärt sich wie folgt: Ein Ereignis A soll genau dann in $\mathcal{F}_\tau$ enthalten sein, wenn "ab dem zufälligen Zeitpunkt τ" entschieden werden kann, ob A eingetreten ist oder nicht. Ein außenstehender Beobachter kann natürlich nur zu festen Zeitpunkten t Beobachtungen machen, und dabei dann feststellen, ob er τ schon ablesen oder messen kann, oder ob er weiter warten muss. Den Wert von τ kann der Beobachter zum Zeitpunkt t genau dann ermitteln, falls $\{\tau \le t\}$ eingetreten ist. (Wegen $\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$ kann er zum Zeitpunkt t ja messen, ob $\{\tau \le t\}$ eingetreten ist oder nicht.) In diesem Fall, d.h. auf $\{\tau \le t\}$, muss er nach obiger Zielsetzung dann für ein $A \in \mathcal{F}_\tau$ aber auch festzustellen können, ob A eingetreten ist oder nicht, d.h. wir müssen fordern, dass $A \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$ gilt. Wir zeigen nun, dass $\mathcal{F}_\tau$ eine σ-Algebra ist: $\emptyset \in \mathcal{F}_\tau$ ist klar, die Abgeschlossenheit bzgl. Komplementbildung folgt aus

$$A^c \cap \{\tau \le t\} = \{\tau \le t\} \setminus (A \cap \{\tau \le t\}), \quad t \in I, A \in \mathcal{F},$$

und sind $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}_\tau$, so gilt

$$\left(\bigcup_i A_i\right) \cap \{\tau \le t\} = \bigcup_i (A_i \cap \{\tau \le t\}) \in \mathcal{F}_t, \quad t \in I.$$

(c) Die Messbarkeit all dieser Abbildungen ist klar. Es bleibt, die Stoppzeiteigenschaften nachzuprüfen. Es ist

$$\{\tau \wedge \sigma \le t\} = \{\tau \le t\} \cup \{\sigma \le t\} \in \mathcal{F}_t$$

und

$$\{\tau \vee \sigma > t\} = \{\tau > t\} \cup \{\sigma > t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\{\tau + \sigma \le t\} \in \mathcal{F}_t$. Es gilt

$$\{\tau + \sigma > t\} = \{\tau = 0, \sigma > t\} \cup \{0 < \tau < t, \tau + \sigma > t\} \cup \{\tau > t, \sigma = 0\} \cup \{\tau \ge t, \sigma > 0\}.$$

Die 1. und 3. Menge hier sind trivialerweise in $\mathcal{F}_t$. Die 4. Menge ist in $\mathcal{F}_t$ da

$$\{\tau < t\} = \bigcup_{n \ge 1} \left\{\tau \le t - \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{F}_t.$$

Die 2. Menge ist gleich

$$\bigcup_{r \in \mathbb{Q}, 0 < r < t} \{t > \tau > r, \sigma > t - r\} \in \mathcal{F}_t.$$

(d) Sei $A \in \mathcal{F}_\tau$, d.h. $A \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t, t \in I$. Dann ist wegen $\tau \le \sigma$

$$A \cap \{\sigma \le t\} = A \cap \{\tau \le t\} \cap \{\sigma \le t\} \in \mathcal{F}_t, \quad t \in I,$$

also $A \in \mathcal{F}_\sigma$.

(e) Zunächst zeigt die Darstellung

$$\tau \wedge t = 1\{\tau \le t\}\tau + 1\{\tau > t\}t,$$

dass für jede Stoppzeit τ die Zufallsvariable $\tau \wedge t$ $\mathcal{F}_t$-messbar ist. Seien nun τ, σ Stoppzeiten und $A \in \mathcal{F}_\tau$, also $A \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$. Dann gilt

$$A \cap \{\tau \le \sigma\} \cap \{\sigma \le t\} = (A \cap \{\tau \le t\}) \cap \{\sigma \le t\} \cap \{\tau \wedge t \le \sigma \wedge t\} \in \mathcal{F}_t.$$