Institut für Mathematische Stochastik SS 2006
Universität Karlsruhe
Dipl.-Math.oec. V. Baumstark
Prof. Dr. G. Last Blatt 1

Übungen zur Vorlesung

Mathematik 4 für die Fachrichtung Wirtschaftswissenschaften

(keine Abgabe)

Aufgabe 1
Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{4}(\cos(x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos(4x) + \frac{1}{8}\cos(8x)).$$

a) Zeigen Sie, dass die Einschränkung von f auf $D := \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ eine Kontraktion mit Kontraktionskonstante $q := \frac{15}{16}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ genau einen Fixpunkt besitzt.

c) Die Folge (x_k) sei definiert durch $x_0 := 0$ und $x_k := f(x_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$. Finden Sie zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit
$$|x - x_k| \leq \varepsilon.$$

Aufgabe 2
Es seien $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $D \subset V$ und $T : D \to D$ eine Abbildung mit der Eigenschaft

$$\|T(x) - T(y)\| < \|x - y\|, \qquad x, y \in D \text{ mit } x \neq y. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass T höchstens einen Fixpunkt besitzt.

b) Es seien speziell $V := \mathbb{R}$, $D := [0, \infty)$, $\|\cdot\| := |\cdot|$ und
$$T(x) := x + \frac{1}{x+2}, \qquad x \in D.$$
Zeigen Sie, dass T die Eigenschaft (1) besitzt, jedoch keinen Fixpunkt auf D.

Aufgabe 3
Gegeben sei die $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 < 1.$$

Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\vec{x} = A\vec{x} + \vec{b}, \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

für alle $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung besitzt.

Hinweis: Benutzen Sie den Banachschen Fixpunktsatz und die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.

Aufgabe 4
Es seien $V := \mathbb{R}^3$, $W := \mathbb{R}^2$ und

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

die Darstellung der linearen Abbildung $f : V \to W$ bezüglich der kanonischen Basis e_1, e_2, e_3 in V und der Basis

$$b_1 := (1, 1), \qquad b_2 := (1, -1)$$

in W. Ferner seien die Basen

$$\tilde{a}_1 := e_2, \quad \tilde{a}_2 := e_3, \quad \tilde{a}_3 := (2, 1, 0),$$

$$\tilde{b}_1 := (2, 0), \quad \tilde{b}_2 := (3, 1)$$

in V bzw. W gegeben. Berechnen Sie die Transformationsmatrix D des Basiswechsels von b_1, b_2 zu $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ und geben Sie die Darstellung $\tilde{A}$ von f bezüglich der Basen $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3$ und $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ an.