Institut für Mathematische Stochastik
Universität Karlsruhe
Dipl.-Math.oec. V. Baumstark
Prof. Dr. G. Last

SS 2006

Blatt 2

Übungen zur Vorlesung

Mathematik 4 für die Fachrichtung Wirtschaftswissenschaften

(keine Abgabe)

Aufgabe 5

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch die Darstellung A bezüglich der kanonischen Basis e_1, e_2, e_3 im $\mathbb{R}^3$ gegeben, wobei

$$\mathrm{A} := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ferner seien im $\mathbb{R}^3$ die Basen

$$a_1 := (4,0,0), \quad a_2 := (3, 3/2, 1/2), \quad a_3 := (2,1,1),$$

$$b_1 := (1,0,0), \quad b_2 := (1,1,0), \quad b_3 := (1,1,1)$$

gegeben. Geben Sie die Darstellung $\tilde{A}$ von f bezüglich der Basen a_1, a_2, a_3 und b_1, b_2, b_3 an. Berechnen Sie ferner die Eigenwerte sowie die zugehörigen Eigenräume von A und $\tilde{A}$

Aufgabe 6

Bestimmen Sie von folgenden Matrizen das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume. Dabei seien $a, b \in \mathbb{R}$.

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix}, \qquad C := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7

a) Es seien A eine reelle $n \times n$-Matrix und $v, w \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Ist $u := v + iw$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, so ist $\bar{u} := v - iw$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\bar{\lambda}$.

b) Gegeben sei die Matrix

$$\mathrm{A} := \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{6} & -1 \\ \sqrt{6} & 2 & \sqrt{6} \\ -1 & -\sqrt{6} & 3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass A die Eigenwerte $\lambda_1 := 1$, $\lambda_2 := \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\lambda_3 := \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ besitzt und berechnen Sie die zugehörigen Eigenräume.