Strukturgleiche Ansätze (1)

Satz: *Man betrachte die lineare DGL*

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0 \cdot y(x) = b(x).$$

mit konstanten Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. *Es gelte*

$$b(x) = e^{ax}(b_0 + b_1 x + \ldots + b_l x^l)$$

für gegebene $a \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{N}_0$ *und* $b_0, \ldots, b_l \in \mathbb{R}$. *Ist* a *Nullstelle des charakteristischen Polynoms, so sei* $k \in \mathbb{N}$ *die Vielfachheit dieser Nullstelle. Andernfalls sei* $k := 0$. *Dann ist*

$$y(x) := x^k e^{ax}(\beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_l x^l)$$

für geeignet gewählte $\beta_0, \ldots, \beta_l \in \mathbb{R}$ *eine Lösung.*

Strukturgleiche Ansätze (2)

Satz: *Man betrachte die lineare DGL*

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0 \cdot y(x) = b(x).$$

mit konstanten Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. *Es gelte*

$$b(x) = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$$

für gegebene $a, b, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *Ist* $a + ib$ *Nullstelle des charakteristischen Polynoms, so sei* $k \in \mathbb{N}$ *die Vielfachheit dieser Nullstelle. Andernfalls sei* $k := 0$. *Dann ist*

$$y(x) := x^k e^{ax}(\gamma_1 \cos bx + \gamma_2 \sin bx)$$

für geeignet gewählte $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ *eine Lösung.*

Strukturgleiche Ansätze (3)

Satz: *Man betrachte das lineare System*

$$\vec{y}\,'(x) = A\vec{y} + \vec{b}(x).$$

Es gelte

$$\vec{b}(x) = e^{ax}(\vec{a}_0 + x\vec{a}_1 + \ldots + x^l\vec{a}_l)$$

für gegebene $l \in \mathbb{N}_0$ *und* $\vec{a}_0, \ldots, \vec{a}_l \in \mathbb{R}^n$. *Ist* a *Eigenwert von* A, *so sei* $k \in \mathbb{N}$ *die (algebraische) Vielfachheit dieses Eigenwerts. Andernfalls sei* $k := 0$. *Dann ist*

$$e^{ax}(\vec{b}_0 + x\vec{b}_1 + \ldots + x^{l+k}\vec{b}_{l+k})$$

für geeignet gewählte $\vec{b}_0, \ldots, \vec{b}_{l+k} \in \mathbb{R}^n$ *eine Lösung.*