Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Stochastik
Prof. Dr. G. Last
Dipl.-Math. oec. Volker Baumstark

Name	
Vorname	
Matr.-Nr.:	

Schriftliche Teilprüfung Mathematik 4
für die Fachrichtung Wirtschaftswissenschaften

Mathematik 4	1 (6)	2 (6)	3 (6)	4 (6)	$\sum$ (24)
Punkte					
Korrektor					

Klausur am 19. März 2007

Dauer der Klausur: 70 Minuten

Prüfungsaufgaben über die Stoffgebiete: Aufgaben 1 - 4.

Wichtiger Hinweis:

Es wird die Aufgabe, in der die höchste Punktzahl erreicht wurde, doppelt gewertet.

Die Teilprüfung in Mathematik 4 ist bestanden, wenn insgesamt mindestens 12 Punkte erreicht sind.

Alle Antworten sind zu begründen, soweit nicht anders angegeben.

Die Antworten und die dazu nötigen Rechnungen und Begründungen sind im Anschluss an die Aufgaben anzugeben. Soweit Kästchen für die Antworten vorgesehen sind, sind die Antworten in diese Kästchen einzutragen.

Die Klausur darf nicht auseinandergenommen werden!

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Betrachten Sie die durch

$$f(x) = 1 - 4^{-x}, \qquad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],$$

definierte Abbildung $f : \left[\frac{1}{2}, 1\right] \to \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie
$$f\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

b) Zeigen Sie, dass f genau einen Fixpunkt $x^* \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ besitzt.

c) Betrachten Sie die durch $x_0 := 1$, $x_{n+1} := f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, rekursiv definierte Folge. Geben Sie zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}_0$ an mit
$$|x_n - x^*| \leq \varepsilon.$$

$n =$

Rechnungen und Begründungen:

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Betrachten Sie die durch

$$f(t) := \begin{cases} \dfrac{\pi - t}{2}, & \text{falls } 0 < t < 2\pi, \\ 0, & \text{falls } t = 0, \end{cases}$$

festgelegte 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie $f\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)$.

$$\boxed{f\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \qquad\qquad}$$

b) Berechnen Sie die Fourierreihe $S(f, t)$, $t \in \mathbb{R}$, von f.

$$\boxed{S(f,t) = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

c) Bestimmen Sie die Menge M aller Punkte aus $\mathbb{R}$, in denen f und die zugehörige Fourierreihe übereinstimmen.

$$\boxed{M = \qquad\qquad}$$

d) Gibt es eine stetige, 2π-periodische Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die mit f auf $(0, 2\pi)$ übereinstimmt, die also $g(t) = f(t)$ für jedes $t \in (0, 2\pi)$ erfüllt?

ja	nein

Rechnungen und Begründungen:

Aufgabe 3 (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem von

$$y^{(4)}(x) + 4y''(x) + 4y(x) = 0.$$

b) Bestimmen Sie eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y^{(4)}(x) + 4y''(x) + 4y(x) = \cos(3x),$$

für welche $y(0) = 0$ gilt.

$y(x) =$

Rechnungen und Begründungen:

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Für $a \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A_a = \begin{pmatrix} 3 & -a & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -a & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die Menge M aller $a \in \mathbb{R}$, für welche A_a diagonalisierbar ist.

$M =$

b) Geben Sie **(ohne Begründung)** für alle $a \in M$ eine 3×3-Matrix S und reelle Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ an mit

$$A_a = S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} S^{-1}.$$

$\lambda_1 =$, $\lambda_2 =$, $\lambda_3 =$

$S =$

Rechnungen und Begründungen: