Lösung zu Aufgabe 1

a) Es ist f monoton wachsend mit

$$f(1/2) = 1 - 4^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \qquad f(1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Folglich

$$f\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) \subset [f(1/2), f(1)] = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

b) Für $x \in [1/2, 1]$ gilt

$$|f'(x)| = \ln(4) \cdot 4^{-x} \leq 2\ln(2) \cdot 4^{-1/2} = 2\ln(2) \cdot \frac{1}{2} = \ln(2) =: q < 1.$$

Folglich ist f eine Kontraktion und die Behauptung folgt aus dem Banachschen Fixpunktsatz.

c) Es ist

$$x_1 = f(x_0) = f(1) = \frac{3}{4},$$

folglich

$$|x_1 - x_0| = \frac{1}{4}.$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$|x_n - x^*| \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot |x_1 - x_0| = \frac{q^n}{4(1-q)}.$$

Ferner gilt

$$\frac{q^n}{4(1-q)} \leq \varepsilon \;\Leftrightarrow\; q^n \leq 4(1-q) \cdot \varepsilon \;\Leftrightarrow\; n \geq r := \frac{\ln(4(1-q)) + \ln(\varepsilon)}{\ln(q)}$$

Wir wählen

$$n := \max(0, \lceil r \rceil).$$

Lösung zu Aufgabe 2

a) Die 2π-Periodizität von f liefert

$$f\left(\frac{5\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

b) Die Abbildung f ist ungerade, folglich $a_n(f) = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Für $n \in \mathbb{N}$ erhält man mit partieller Integration

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi - t}{2} \cdot \sin(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{\pi}\cdot(\pi - t)\cdot\frac{1}{n}\cdot\cos(nt)\Big|_0^\pi - \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \cos(nt) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2\pi}\sin(nt)\Big|_0^\pi = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Folglich

$$S(f,t) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(nt)}{n}.$$

c) Die Abbildung f ist stetig diff'bar auf $\mathbb{R} \setminus \{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$, folglich gilt dort $f(t) = S(f,t)$. Ferner gilt

$$f(2\pi k) = f(0) = 0 = S(f, 2\pi k), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Somit stimmt f auf ganz $\mathbb{R}$ mit $S(f,\cdot)$ überein.

d) Angenommen, es ist g 2π-periodisch mit $g(t) = f(t)$, $t \in (0, 2\pi)$. Es folgt

$$g(0+) = f(0+) = \frac{\pi}{2} \neq -\frac{\pi}{2} = f(2\pi-) = g(2\pi-) = g(0-).$$

Folglich ist g unstetig in $x = 0$, es existiert somit keine stetige, 2π-periodische Abbildung g, welche mit f auf $(0, 2\pi)$ übereinstimmt.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Das charakteristische Polynom ist gegeben durch

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^2 + 4 = (\lambda^2 + 2)^2 = (\lambda - \sqrt{2}i)^2(\lambda + \sqrt{2}i)^2.$$

Ein Fundamentalsystem ist somit gegeben durch

$$y_1(x) := \cos(\sqrt{2}x), \qquad y_2(x) = x\cos(\sqrt{2}x), \qquad y_3(x) = \sin(\sqrt{2}x), \qquad y_4(x) = x\sin(\sqrt{2}x).$$

b) Für eine partikuläre Lösung wählen wir den Ansatz

$$\bar{y}(x) := a\cos(3x) + b\sin(3x).$$

Wegen $\cos'' = -\cos$, $\sin'' = -\sin$ gelten

$$\bar{y}''(x) = -3^2\bar{y}(x) = -9\bar{y}(x), \quad \bar{y}^{(4)} = 3^4\bar{y}(x) = 81\bar{y}(x).$$

Einsetzen liefert

$$\cos(3x) = 81\bar{y}(x) - 36\bar{y}(x) + 4\bar{y}(x) = 49\bar{y}(x) = 49a\cos(3x) + 49b\sin(3x).$$

Folglich $a = 1/49$, $b = 0$ und

$$\bar{y}(x) = \frac{\cos(3x)}{49}.$$

Alle Lösungen y der inhomogenen Diff'gleichung lassen sich beschreiben durch

$$y(x) = c_1\cos(\sqrt{2}x) + c_2 x\cos(\sqrt{2}x) + c_3\sin(\sqrt{2}x) + c_4 x\sin(\sqrt{2}x) + \frac{\cos(3x)}{49}.$$

Es gilt

$$y(0) = c_1 + \frac{1}{49} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = -\frac{1}{49}.$$

Folglich ist

$$\tilde{y}(x) := -\frac{1}{49}\cdot\cos(\sqrt{2}x) + \frac{1}{49}\cdot\cos(3x) = \frac{\cos(3x) - \cos(\sqrt{2}x)}{49}$$

eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit $y(0) = 0$.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Es ist

$$\begin{aligned}
\det(A_a - \lambda E_3) &= \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -a & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & -a & 3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (2-\lambda)((3-\lambda)^2-1) \\
&= (2-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8) \\
&= (2-\lambda)^2(4-\lambda).
\end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A_a berechnen sich folglich zu 2 (Vielfachheit 2) und 4 (Vielfachheit 1).

Der Eigenraum $E(A_a,4)$ berechnet sich mittels

$$\begin{pmatrix} -1 & -a & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -a & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zu $E(A_a,4) = \mathrm{Span}\{(-1,0,1)\}$.

Der Eigenraum $E(A_a,2)$ berechnet sich mittles

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -a & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

zu $E(A_a,2) = \mathrm{Span}\{(1,0,1)\}$ falls $a \neq 0$ und zu $E(A_a,2) = \mathrm{Span}\{(1,0,1),(0,1,0)\}$ falls $a = 0$.

A ist genau dann diagonalisierbar, falls $\dim E(A_a,2) = 2$, also falls $a = 0$. Wir erhalten

$$M = \{0\}.$$

b) Wir setzen $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ und

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$