Institut für Mathematische Stochastik
Universität Karlsruhe
Prof. Dr. G. Last
Dipl.-Math.oec. V. Baumstark

SS 2007

Blatt 1

Übungen zur Vorlesung

Mathematik 4 für die Fachrichtung Wirtschaftswissenschaften

(keine Abgabe)

Aufgabe 1

Betrachten Sie für $a \in \mathbb{C}$ die lineare Abbildung $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, gegeben durch

$$f(\vec{x}) := \begin{pmatrix} ia+1 & i-1 & 0 \\ 1-i & i+1 & 0 \\ a^2+1 & -a^2-1 & a^2+1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}, \qquad \vec{x} \in \mathbb{C}^3.$$

a) Berechnen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{C}$ den Rang und den Kern von f.

b) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{C}$, für welche f surjektiv ist.

Aufgabe 2

Es sei W der Vektorraum aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$. Die lineare Abbildung $T : W \to W$ sei gegeben durch

$$T(f) := f + 2f', \qquad f \in W.$$

a) Zeigen Sie, dass T surjektiv ist.

Hinweis: Betrachten Sie für $h \in W$ die Abbildung

$$f(x) := \frac{1}{2} \cdot \exp(-x/2) \cdot \int_0^x h(t) \cdot \exp(t/2)\,\mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

b) Ist T injektiv?

c) Betrachten Sie die Einschränkung $\tilde{T}$ von T auf den Raum $V = \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ aller reellen Polynome vom Höchstgrad n, d.h. betrachten Sie die Abbildung

$$\tilde{T} :\ f \mapsto f + 2f', \qquad f \in V.$$

Berechnen Sie den Kern und das Bild von $\tilde{T}$.

Aufgabe 3

Es sei F der Vektorraum aller reellen Zahlenfolgen und

$$F_f := \{(a_n)_{n\geq 1} \in F : \text{ es existiert ein } k \in \mathbb{N} \text{ mit } a_n = 0 \text{ für alle } n \geq k\}$$

der Vektorraum aller finiten Zahlenfolgen.

a) Finden Sie eine lineare und bijektive Abbildung $T : \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \to F_f$. $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ bezeichnet dabei den Raum aller reellen Polynome.

b) Finden Sie eine lineare Abbildung $T_1 : F_f \to F_f$, welche surjektiv, aber nicht injektiv ist.

c) Finden Sie eine lineare Abbildung $T_2 : F_f \to F_f$, welche injektiv, aber nicht surjektiv ist.