Institut für Stochastik
Universität Karlsruhe
Prof. Dr. G. Last
Dipl.-Math.oec. V. Baumstark

SS 2007

Blatt 2

Übungen zur Vorlesung

Mathematik 4 für die Fachrichtung Wirtschaftswissenschaften

(keine Abgabe)

Aufgabe 4
Die Räume $\mathbb{C}^m$ und $\mathbb{C}^n$ seien mit der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ versehen und A eine komplexe $m \times n$-Matrix. Die lineare Abbildung $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ sei definiert durch

$$T(\vec{x}) := A \cdot \vec{x}, \qquad \vec{x} \in \mathbb{C}^n.$$

Zeigen Sie

$$\|T\| = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|.$$

Aufgabe 5
Sei $n \geq 2$. Wir definieren eine Norm auf dem reellen Vektorraum aller $n \times n$-Matrizen $A = (a_{ij})$ durch

$$\|A\|_* := \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|.$$

a) Gilt $\|A \cdot B\|_* \leq \|A\|_* \cdot \|B\|_*$ für alle $n \times n$-Matrizen A?

b) Zeigen Sie, dass im $\mathbb{R}^n$ keine Norm $\|\cdot\|$ existiert, so dass

$$\|A\|_* = \sup\{\|A \cdot \vec{x}\| : \|\vec{x}\| = 1, \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

für alle $n \times n$-Matrizen A gilt.

Aufgabe 6
Es seien $V := C^1[0,1]$ der Raum der auf $[0,1]$ stetig differenzierbaren Funktionen und $W := C[0,1]$ der Raum der auf $[0,1]$ stetigen Funktionen. Der Raum W sei versehen mit der Maximumsnorm. Geben Sie eine Norm auf V an, so dass der durch

$$T_1(f) := f', \qquad f \in V,$$

definierte Operator stetig ist.

Aufgabe 7
Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{4}(\cos(x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos(4x) + \frac{1}{8}\cos(8x)).$$

a) Zeigen Sie, dass die Einschränkung von f auf $D := \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ eine Kontraktion mit Kontraktionskonstante $q := \frac{15}{16}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ genau einen Fixpunkt besitzt.

c) Die Folge (x_k) sei definiert durch $x_0 := 0$ und $x_k := f(x_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$. Finden Sie zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$|x - x_k| \leq \varepsilon.$$

Aufgabe 8
Es seien $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $D \subset V$ und $T : D \to D$ eine Abbildung mit der Eigenschaft

$$\|T(x) - T(y)\| < \|x - y\|, \qquad x, y \in D \text{ mit } x \neq y. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass T höchstens einen Fixpunkt besitzt.

b) Es seien speziell $V := \mathbb{R}$, $D := [0, \infty)$, $\|\cdot\| := |\cdot|$ und

$$T(x) := x + \frac{1}{x+2}, \qquad x \in D.$$

Zeigen Sie, dass T die Eigenschaft (1) besitzt, jedoch keinen Fixpunkt in D.