Institut für Stochastik
Universität Karlsruhe
Prof. Dr. G. Last
Dipl.-Math.oec. V. Baumstark

SS 2007

Blatt 3

Übungen zur Vorlesung

Mathematatik 4 für die Fachrichtung Wirtschaftswissenschaften

(keine Abgabe)

Aufgabe 9

Gegeben seien $a, b, \omega \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $A \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ existieren mit

$$a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x) = A\sin(\omega x + \varphi), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 10

Gegeben sei eine stetige, stückweise stetig differenzierbare, 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Fourierkoeffizienten $a_n(f)$ und $b_n(f)$. Drücken Sie die Fourierkoeffizienten $a_n(f')$ und $b_n(f')$ der Ableitung f' durch die Fourierkoeffizienten von f aus.

Aufgabe 11

Die folgenden 2π-periodischen Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien gegeben durch $(-\pi \leq x < \pi)$

$$f_1(x) := x^2, \qquad f_3(x) := x(x-\pi)(x+\pi),$$

$$f_2(x) := \begin{cases} -x^2, & \text{falls } -\pi \leq x < 0, \\ x^2, & \text{falls } 0 \leq x < \pi, \end{cases} \qquad f_4(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi \leq x < 0, \\ x & \text{für } 0 \leq x < \pi, \end{cases}$$

$$f_5(x) := \mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x).$$

Berechnen Sie die zugehörigen Fourierkoeffizienten sowie den Reihenwert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3}.$$

Hinweise: Betrachten Sie für f_3 die stückweise definierte Ableitung f_3'. Für f_5 betrachten Sie $\exp(\cos x + i\sin x)$.

Aufgabe 12

Betrachten Sie die durch

$$f(t) := \begin{cases} \dfrac{\pi - t}{2}, & \text{falls } 0 < t < 2\pi, \\ 0, & \text{falls } t = 0, \end{cases}$$

festgelegte 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die Fourierreihe $S(f, t)$, $t \in \mathbb{R}$, von f.

b) Bestimmen Sie die Menge M aller Punkte aus $\mathbb{R}$, in denen f und die zugehörige Fourierreihe übereinstimmen.

c) Gibt es eine stetige, 2π-periodische Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die mit f auf $(0, 2\pi)$ übereinstimmt, die also $g(t) = f(t)$ für jedes $t \in (0, 2\pi)$ erfüllt?