Institut für Stochastik
Universität Karlsruhe
Prof. Dr. G. Last
Dipl.-Math.oec. V. Baumstark

SS 2007

Blatt 4

Übungen zur Vorlesung

Mathematik 4 für die Fachrichtung Wirtschaftswissenschaften

(keine Abgabe)

Aufgabe 13
Auf dem Raum L_π^c aller 2π-periodischen stetigen Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ wird durch

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \bar{g}(t) \, \mathrm{d}t$$

ein Skalarprodukt definiert. Für $k \in \mathbb{Z}$ definiere $h_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch

$$h_k(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-ikt}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

und $\mathcal{H}_m \subset L_\pi^c$ durch

$$\mathcal{H}_m := \mathrm{Span}(h_k,\, k \in \{-m, \ldots, m\}).$$

a) Betrachten Sie nun ein festes $f \in L_\pi^c$. Es sei $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die orthogonale Projektion von f auf $\mathcal{H}_m$. Zeigen Sie

$$f_m(t) := \sum_{n=-m}^{m} c_n(f) \cdot \mathrm{e}^{-int}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Dabei sind $c_n(f)$ die Fourierkoeffizienten von f.

b) Zeigen Sie

$$2\pi \sum_{n=-m}^{m} |c_n(f)|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f_m(t)|^2 \, \mathrm{d}t.$$

Aufgabe 14
Es sei $a > 0$. Betrachten Sie für $k \in \mathbb{N}$ die durch

$$f_k(t) := \begin{cases} \dfrac{a^k t^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \mathrm{e}^{-at}, & \text{falls } t \geq 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

gegebenen integrierbaren Funktionen $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Fourier-Transformation von f_k, $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 15

Berechnen Sie zu folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die zugehörige Fourier-Transformation.

a) $f_1(t) := \mathbf{1}_{[0,\pi]}(t) \cdot \cos(t)$, *b)* $f_2(t) := (2\pi)^{-1/2} \cdot t \cdot \mathrm{e}^{-t^2/2}$,

c) $f_3(t) := -(2\pi)^{-1/2} \cdot t^2 \cdot \mathrm{e}^{-t^2/2}$