

Übungen zur Vorlesung  
Mathematik 4 für die Fachrichtung Wirtschaftswissenschaften  
(keine Abgabe)

**Aufgabe 19**

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme auf  $\mathbb{R}$ .

- a)  $y'(x) = -e^{-x}y(x)$ ,  $y(0) = -1$ .
- b)  $y'(x) = \cos(x)(y(x) + 1)$ ,  $y(\pi) = 0$ .
- c)  $y'(x) = |x|y(x) - x \cdot 1_{[0,\infty)}(x)$ ,  $y(0) = 1$ .

**Aufgabe 20**

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = x \left( 1 + \frac{1}{1 + y(x)^2} \right), \quad y(1) = 1.$$

- a) Zeigen Sie, dass dieses Anfangswertproblem genau eine Lösung  $y$  auf  $I := [-2, 2]$  besitzt.
- b) Geben Sie eine Folge von stetigen Funktionen  $g_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , an, so dass  $(g_n)$  bezüglich  $\|\cdot\|_\infty$  gegen  $y$  konvergiert.
- c) Berechnen Sie ausgehend von  $g_0 \equiv 0$  die ersten beiden Iterationen  $g_1$  und  $g_2$ .

**Aufgabe 21**

Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem zweiter Ordnung.

$$y''(x) - 7y'(x) + 12y(x) = (x + 1)e^{2x}, \quad y(0) = 2, \quad y(1) = -2e^2.$$

Hinweis: Für eine partikuläre Lösung können Sie den Ansatz  $\tilde{y}(x) = (a + bx)e^{2x}$  wählen.

**Aufgabe 22**

- a) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem von

$$y^{(3)}(x) + y'(x) - 2y(x) = 0.$$

b) Bestimmen Sie eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y^{(3)}(x) + y'(x) - 2y(x) = e^x,$$

für welche  $y(0) = 1$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$  gelten.

### Aufgabe 23

a) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem von

$$y^{(4)}(x) + 4y''(x) + 4y(x) = 0.$$

b) Bestimmen Sie eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y^{(4)}(x) + 4y''(x) + 4y(x) = \cos(3x),$$

für welche  $y(0) = 0$  gilt.