Institut für Stochastik
Universität Karlsruhe
Prof. Dr. G. Last
Dipl.-Math.oec. V. Baumstark

SS 2007

Blatt 1

Übungen zur Vorlesung

Mathematik 4 für die Fachrichtung Wirtschaftswissenschaften

Lösung zu Aufgabe 2

a) Sei $h \in W$ und f wie im Hinweis angegeben. Es gelten dann $f \in W$ und für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{4} \cdot \exp(-x/2) \cdot \int_0^x h(t) \cdot \exp(t/2)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2} \cdot \exp(-x/2) \cdot h(x) \cdot \exp(x/2) \\ &= -\frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} \cdot h(x). \end{aligned}$$

Folglich ist

$$T(f) = f + 2f' = f - f + h = h$$

und $h \in T(W)$.

b) Die Abbildung T ist nicht injektiv. Sei

$$f_1(x) := \exp(-x/2), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Dann ist

$$f_1'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \exp(-x/2) = -\frac{1}{2} \cdot f_1(x),$$

folglich

$$T(f_1) = f_1 + 2f_1' = \mathbf{0} = T(\mathbf{0}),$$

wobei $\mathbf{0}$ die Nullabbildung bezeichne.

c) Wir berechnen den Kern von $\tilde{T}$. Es sei $f \neq \mathbf{0}$ ein Polynom vom Grad $0 \leq k \leq n$, d.h. es gilt

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j x^j, \qquad x \in \mathbb{R},$$

mit

$$a_k \neq 0.$$

Angenommen, es ist

$$\mathbf{0} = \tilde{T}(f) = f + 2f'.$$

Es ergibt sich für alle $x \in \mathbb{R}$

$$0 = \sum_{j=0}^{k} a_j x^j + 2 \sum_{j=1}^{k} j a_j x^{j-1} = a_k x^k + \sum_{j=0}^{k-1} (a_j + 2(j+1)a_{j+1}) x^j.$$

Wir haben also ein Polynom vom Grad k gefunden, welches konstant 0 ist, Widerspruch. Folglich gelten $\tilde{T}(f) \neq \mathbf{0}$ und

$$\operatorname{Kern}(\tilde{T}) = \{0\}$$

und $\tilde{T}$ ist injektiv. Wegen $\dim V = n + 1 < \infty$ ist $\tilde{T}$ auch surjektiv, somit

$$\operatorname{Bild}(\tilde{T}) = V = \operatorname{Pol}_n(\mathbb{R}).$$

Lösung zu Aufgabe 3

a) Die Abbildung $T : \operatorname{Pol}(\mathbb{R}) \to F_f$, definiert durch

$$T(f) := (a_0, \ldots, a_k, 0, 0, \ldots), \qquad f \in \operatorname{Pol}(\mathbb{R}) \quad \text{der Gestalt } f(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j x^k,$$

ist offensichtlich linear und bijektiv.

b) Wir definieren $T_1 : F_f \to F_f$ durch

$$T_1((a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)) := (a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots), \qquad (a_n)_{n\geq 1} \in F_f.$$

Die Abbildung T_1 ist offensichtlich linear. Ist $(a_n)_{n\geq 1} \in F_f$, so gilt für alle $b \in \mathbb{R}$

$$T_1((b, a_1, a_2, a_3, \ldots)) = (a_n)_{n\geq 1},$$

folglich ist T_1 surjektiv, aber nicht injektiv.

c) Wir definieren $T_2 : F_f \to F_f$ durch

$$T_2((a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)) := (0, a_1, a_2, a_3, \ldots), \qquad (a_n)_{n\geq 1} \in F_f.$$

Die Abbildung T_2 ist offensichtlich linear und nicht surjektiv. Ferner gilt

$$T_2((a_n)_{n\geq 1}) = (0, 0, \ldots) \quad \Rightarrow \quad a_n = 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Folglich enthält der Kern von T_2 nur die Nullfolge und T_2 ist injektiv.