Institut für Stochastik
Universität Karlsruhe
Prof. Dr. G. Last
Dipl.-Math.oec. V. Baumstark

SS 2007

Blatt 2

Übungen zur Vorlesung

Mathematik 4 für die Fachrichtung Wirtschaftswissenschaften

Lösung zu Aufgabe 5

a) Sei die Matrix $A = (a_{ij})$ gegeben durch $a_{ij} = 1$, $i, j = 1, \ldots, n$. Dann ist $\|A\|_* = 1$, aber für $n \geq 2$ ist

$$\|A \cdot A\|_* = \| \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} \|_* = n > \|A\| \cdot \|A\|.$$

b) Wir nehmen an, es existiere eine solche Norm. Für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ folgt dann

$$\|A \cdot \vec{x}\| = \|A \cdot \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\| \cdot \|\vec{x}\| \leq \|A\|_* \cdot \|\vec{x}\|.$$

Für $\vec{x} = 0$ gilt

$$\|A \cdot \vec{x}\| = \|\vec{0}\| = 0 \leq \|A\|_* \cdot \|\vec{x}\|.$$

Somit gilt für alle $n \times n$-Matrizen A, B und $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\vec{x}\| = 1$

$$\|A \cdot B \cdot \vec{x}\| \leq \|A\|_* \cdot \|B \cdot \vec{x}\| \leq \|A\|_* \cdot \|B\|_* \cdot \|\vec{x}\| = \|A\|_* \cdot \|B\|_*,$$

insbesondere ist

$$\|A \cdot B\|_* = \sup\{\|A \cdot B \cdot \vec{x}\|, \|\vec{x}\| = 1, \vec{x} \in \mathbb{R}^n\} \leq \|A\|_* \cdot \|B\|_*$$

im Widerspruch zu a).

Lösung zu Aufgabe 8

a) Angenommen, es existieren Fixpunkte $x, y \in D$ von T mit $x \neq y$. Dann sind

$$T(x) = x, \qquad T(y) = y.$$

Aus (1) folgt

$$\|x - y\| = \|T(x) - T(y)\| < \|x - y\|,$$

Widerspruch.

b) Seien $y > x \geq 0$. Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt die Existenz eines $z \in (x, y)$ mit

$$|T(x) - T(y)| = |T'(z)| \cdot |x - y| = \left|1 - \frac{1}{(z+2)^2}\right| \cdot |x - y| < |x - y|.$$

Ferner gilt

$$T(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x+2} = 0.$$

T besitzt folglich keinen Fixpunkt.