Institut für Stochastik
Universität Karlsruhe
Prof. Dr. G. Last
Dipl.-Math.oec. V. Baumstark

SS 2007

Blatt 3

Übungen zur Vorlesung

Mathematik 4 für die Fachrichtung Wirtschaftswissenschaften

Lösung zu Aufgabe 9

Falls $\omega = 0$ ist, so setze $A := a$, $\varphi := \pi/2$. Es gelte nun $\omega \neq 0$. Mithilfe des Additionstheoremes

$$\sin(\omega t + \varphi) = \sin(\omega t)\cos\varphi + \cos(\omega t)\sin\varphi$$

berechnet sich die Gleichung aus der Aufgabe zu

$$a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = A\sin(\omega t)\cos\varphi + A\cos(\omega t)\sin\varphi.$$

Setzen von $t = 0$ und $t = \pi/(2\omega)$ liefert

$$a = A\sin\varphi, \qquad b = A\cos\varphi. \qquad (*)$$

Aus $(*)$ folgt

$$a^2 + b^2 = A^2((\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2) = A^2,$$

somit

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Es sei $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ die Umkehrfunktion von cos. Wir wählen $\varphi := 0$ falls $A = 0$ und sonst

$$\varphi := \begin{cases} \arccos\left(\frac{b}{A}\right), & \text{falls } a \geq 0, \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{b}{A}\right), & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Dann gilt $(*)$ und folglich die Behauptung.

Lösung zu Aufgabe 10

Die FR von f' ergibt sich durch gliedweise Differentiation der FR von f. Somit ist

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -a_n(f)n\sin(nx) + b_n(f)n\cos(nx).$$

Es folgen

$$a_0(f') = b_0(f') = 0, \qquad a_n(f') = nb_n(f), \qquad b_n(f') = -na_n(f).$$

Lösung zu Aufgabe 11

a) Die Abbildung f ist ungerade, folglich $a_n(f) = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Für $n \in \mathbb{N}$ erhält man mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\pi - t}{2} \cdot \sin(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{\pi} \cdot (\pi - t) \cdot \frac{1}{n} \cdot \cos(nt)\Big|_0^\pi - \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \cos(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2\pi} \sin(nt)\Big|_0^\pi = \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Folglich

$$S(f,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n}.$$

b) Die Abbildung f ist stetig diff'bar auf $\mathbb{R} \setminus \{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$, folglich gilt dort $f(t) = S(f,t)$. Ferner gilt

$$f(2\pi k) = f(0) = 0 = S(f, 2\pi k), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Somit stimmt f auf ganz $\mathbb{R}$ mit $S(f,\cdot)$ überein.

c) Angenommen, es ist g 2π-periodisch mit $g(t) = f(t)$, $t \in (0, 2\pi)$. Es folgt

$$g(0+) = f(0+) = \frac{\pi}{2} \neq -\frac{\pi}{2} = f(2\pi-) = g(2\pi-) = g(0-).$$

Folglich ist g unstetig in $x = 0$, es existiert somit keine stetige, 2π-periodische Abbildung g, welche mit f auf $(0, 2\pi)$ übereinstimmt.