Institut für Stochastik
Universität Karlsruhe
Prof. Dr. G. Last
Dipl.-Math.oec. V. Baumstark

SS 2007

Blatt 4

Übungen zur Vorlesung

Mathematik 4 für die Fachrichtung Wirtschaftswissenschaften

Lösung zu Aufgabe 13

a) Die Folge h_k, $k \in \{-m, \ldots, m\}$, bildet eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_m$. Die orthogonale Projektion $f_{\mathcal{H}_m}$ von f auf $\mathcal{H}_m$ ist gegeben durch

$$f_{\mathcal{H}_m}(t) = \sum_{n=-m}^{m} \gamma_n h_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-m}^{m} \gamma_n \mathrm{e}^{-int}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

mit

$$\gamma_n = \langle f, h_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \mathrm{e}^{-int} \,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi} \cdot c_n(f).$$

Somit gilt

$$f_{\mathcal{H}_m}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-m}^{m} \sqrt{2\pi} \cdot c_n(f) \cdot \mathrm{e}^{-int} = f_m(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

b) Wir benutzen wieder, dass die Folge h_k, $k \in \{-m, \ldots, m\}$, eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_m$ bildet und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{\pi} |f_m(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \langle f_m, f_m \rangle &= \sum_{k=-m}^{m} \sum_{l=-m}^{m} c_k(f) \cdot \bar{c}_l(f) \cdot 2\pi \cdot \langle h_k, h_l \rangle \\ &= 2\pi \sum_{k=-m}^{m} c_k(f) \cdot \bar{c}_k(f) = 2\pi \sum_{k=-m}^{m} |c_k(f)|^2. \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 14

Wir zeigen mit vollständiger Induktion:

$$\mathcal{F}_{f_k}(u) = \left(\frac{a}{a+iu} \right)^k, \qquad u \in \mathbb{R},\, k \in \mathbb{N}.$$

Induktionsanfang bei $k = 1$: Zunächst ist für $u \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}_{f_1}(u) = \int_0^{\infty} f_1(t) \mathrm{e}^{-iut} \,\mathrm{d}t = a \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(a+iu)t} \,\mathrm{d}t = \frac{a}{a+iu}.$$

Die Induktionsbehauptung gelte nun für ein $k \in \mathbb{N}$. Es ist

$$f_{k+1}(t) = \frac{a}{k} \cdot t f_k(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

und für $u \in \mathbb{R}$

$$-i\mathcal{F}_{tf_k}(u) = \mathcal{F}'_{f_k}(u) = \left(\left(\frac{a}{a+iu}\right)^k\right)' = \frac{-ika^k}{(a+iu)^{k+1}}.$$

Aus der Linearität von $f \mapsto \mathcal{F}_f$ folgt nun für $u \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}_{f_{k+1}}(u) = \frac{a}{k} \cdot \mathcal{F}_{tf_k}(u) = \left(\frac{a}{a+iu}\right)^{k+1}.$$

Lösung zu Aufgabe 15

a) Es sei im Folgenden stets $u \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{f_1}(u) &:= \int_0^\pi \cos(t)\mathrm{e}^{-iut}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\sin(t)\mathrm{e}^{-iut}\right]_{t=0}^{t=\pi} + iu\int_0^\pi \sin(t)\mathrm{e}^{-iut}\,\mathrm{d}t \\
&= -iu\left[\cos(t)\mathrm{e}^{-iut}\right]_{t=0}^{t=\pi} - (iu)^2\int_0^\pi \cos(t)\mathrm{e}^{-iut}\,\mathrm{d}t \\
&= iu(\mathrm{e}^{-iu\pi}+1) + u^2\int_0^\pi \cos(t)\mathrm{e}^{-iut}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Es folgt für $u \notin \{-1,1\}$

$$\mathcal{F}_{f_1}(u) = \frac{iu(\mathrm{e}^{-iu\pi}+1)}{1-u^2}.$$

Es sei $h(u) := \mathrm{e}^{-iu\pi}$. Es gelten $h(1) = h(-1) = -1$ und $h'(u) = -i\pi h(u)$. Aus der Stetigkeit von $\mathcal{F}_{f_1}$ und der Differenzierbarkeit von h folgt

$$\mathcal{F}_{f_1}(1) = \lim_{u\to 1}\mathcal{F}_{f_1}(u) = \lim_{u\to 1}\frac{h(u)-h(1)}{(u-1)}\cdot\frac{-iu}{(u+1)} = -\frac{ih'(1)}{2} = \frac{\pi}{2}$$

und analog

$$\mathcal{F}_{f_1}(-1) = \lim_{u\to -1}\mathcal{F}_{f_1}(u) = \lim_{u\to -1}\frac{h(u)-h(-1)}{(u+1)}\cdot\frac{-iu}{(u-1)} = -\frac{ih'(-1)}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

b) Betrachte $g(t) := (2\pi)^{-1/2}\cdot\mathrm{e}^{-t^2/2}$. Dann sind $\mathcal{F}_g(u) = \mathrm{e}^{-u^2/2}$ und $g' = -f_2$. Aus der Linearität der Abbildung $f \mapsto \mathcal{F}$ folgt

$$\mathcal{F}_{f_2}(u) = \mathcal{F}_{-g'}(u) = -\mathcal{F}_{g'}(u) = -ui\mathcal{F}_g(u) = -ui\cdot\mathrm{e}^{-u^2/2}.$$

c) Es ist

$$f_2' = (2\pi)^{-1/2}\mathrm{e}^{-t^2/2} - (2\pi)^{-1/2}\cdot t^2\mathrm{e}^{-t^2/2} = g + f_3.$$

Es folgt wie oben

$$\mathcal{F}_{f_3}(u) = \mathcal{F}_{f_2'-g} = \mathcal{F}_{f_2'} - \mathcal{F}_g = ui\mathcal{F}_{f_2} - \mathcal{F}_g = -(ui)^2\cdot\mathrm{e}^{-u^2/2} - \mathrm{e}^{-u^2/2} = (u^2-1)\mathrm{e}^{-u^2/2}.$$