Institut für Stochastik
Universität Karlsruhe
Prof. Dr. G. Last
Dipl.-Math.oec. V. Baumstark

SS 2007

Blatt 5

Übungen zur Vorlesung

Mathematik 4 für die Fachrichtung Wirtschaftswissenschaften

Lösung zu Aufgabe 17

a) Es ist
$$0 \le P(t) < S, \qquad t \ge 0.$$
Aus $(*)$ erhalten wir $P'(t) \ge 0$, $t \ge 0$, und hieraus
$$P(t) = P(0) + \int_0^t P'(x)\,\mathrm{d}x \ge P(0) > 0.$$
Nach $(*)$ ergibt sich hieraus $P'(t) > 0$, $t \ge 0$.

b) Aus der Differenzierbarkeit von P und aus $(*)$ erhalten wir die Differenzierbarkeit von P'. Wir rechnen
$$P''(t) = q \cdot P'(t) \cdot (S - P(t)) + q \cdot P(t) \cdot (-P'(t)) = q \cdot P'(t)(S - 2P(t)),$$
insbesondere ist
$$P''(0) = q \cdot P'(0) \cdot (S - 2P(0)) > 0.$$
Aus der Stetigkeit von P und P' folgt die Stetigkeit von P''. Besitzt P keinen Wendepunkt, so ist $P''(t) > 0$ für alle $t \ge 0$ und wir erhalten
$$P'(x) \ge P'(0) > 0, \qquad x \ge 0.$$
Folglich gilt
$$P(t) = P(0) + \int_0^t P'(x)\,\mathrm{d}x \ge P(0) + t \cdot P'(0),$$
insbesondere existiert ein $t \ge 0$ mit $P(t) \ge S$, Widerspruch. Somit existiert ein $t_0 \ge 0$ mit
$$P''(t_0) = q \cdot P'(t_0)(S - 2P(t_0)) = 0.$$
Nach a) ist $P'(t_0) > 0$ und P streng monoton wachsend, folglich gelten
$$S - 2P(t_0) = 0, \qquad \begin{array}{ll} P''(t) > 0, & \text{falls } t < t_0, \\ P''(t) < 0, & \text{falls } t > t_0, \end{array}$$
d.h. es ist t_0 ist ein Wendepunkt mit
$$P(t_0) = \frac{S}{2}.$$

c) Da P streng monoton wächst, kann nur ein $t_0 \ge 0$ mit $P(t_0) = S/2$ existieren.