Institut für Stochastik
Universität Karlsruhe
Prof. Dr. G. Last
Dipl.-Math.oec. V. Baumstark

SS 2007

Blatt 6

Übungen zur Vorlesung

Mathematik 4 für die Fachrichtung Wirtschaftswissenschaften

Lösung zu Aufgabe 20

a) Die Funktion $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x, y) = x\Big(1 + \frac{1}{1 + y^2}\Big)$$

ist stetig. Seien $x \in I$ und $y, z \in \mathbb{R}$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit

$$|f(x, y) - f(x, z)| = \left|\frac{x}{1 + y^2} - \frac{x}{1 + z^2}\right| = |x| \cdot \frac{2|\xi|}{(1 + \xi^2)^2} \cdot |y - z|.$$

Wegen $|x| \leq 2$ für $x \in I$ und

$$\frac{2|\xi|}{(1 + \xi^2)^2} \leq 1, \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

genügt f der Lipschitzbedingung

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq L \cdot |y - z|, \qquad x \in I,\ y, z \in \mathbb{R},$$

mit $L = 2$. Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard–Lindelöf besitzt das gegebene Anfangswertproblem genau eine Lösung y auf I.

b) Gemäß Vorlesung kann $g_0 \equiv 0$ definiert werden und $g_{n+1} : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, rekursiv durch

$$g_{n+1}(x) := 1 + \int_1^x f(t, g_n(t))\mathrm{d}t = 1 + \int_1^x t\Big(1 + \frac{1}{1 + g_n(t)^2}\Big)\,\mathrm{d}t.$$

Dann konvergiert (g_n) bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ gegen y.

c) Es sind für $x \in I$

$$g_1(x) = 1 + \int_1^x 2t\,\mathrm{d}t = 1 + x^2 - 1 = x^2$$

und

$$\begin{aligned}
g_2(x) &= 1 + \int_1^x t\Big(1 + \frac{1}{1 + g_1(t)^2}\Big)\,\mathrm{d}t = 1 + \int_1^x t\Big(1 + \frac{1}{1 + t^4}\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= 1 + \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 1) + \int_1^x \frac{t}{1 + t^4}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 1) + \int_1^{x^2} \frac{1}{2(1 + s^2)}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 1) + \frac{1}{2} \cdot (\arctan(x^2) - \arctan(1)) = \frac{1}{2} \cdot \Big(x^2 + \arctan(x^2) + 1 - \frac{\pi}{4}\Big).
\end{aligned}$$