Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Stochastik
Prof. Dr. G. Last
Dipl.-Math. oec. Volker Baumstark

Name
Vorname
Matr.-Nr.:

Schriftliche Teilprüfung Mathematik 4
für die Fachrichtung Wirtschaftswissenschaften

Mathematik 4	1 (6)	2 (6)	3 (6)	4 (6)	$\sum$ (24)
Punkte					
Korrektor					

Klausur am 20. September 2007

Dauer der Klausur: 70 Minuten

Prüfungsaufgaben über die Stoffgebiete: Aufgaben 1 - 4.

Wichtiger Hinweis:

Es wird die Aufgabe, in der die höchste Punktzahl erreicht wurde, doppelt gewertet.

Die Teilprüfung in Mathematik 4 ist bestanden, wenn insgesamt mindestens 12 Punkte erreicht sind.

Alle Antworten sind zu begründen, soweit nicht anders angegeben.

Die Antworten und die dazu nötigen Rechnungen und Begründungen sind im Anschluss an die Aufgaben anzugeben. Soweit Kästchen für die Antworten vorgesehen sind, sind die Antworten in diese Kästchen einzutragen.

Die Klausur darf nicht auseinandergenommen werden!

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Betrachten Sie die Gleichung

$$x - \sqrt{x} + \mathrm{e}^{-x} = 1. \qquad (*)$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass obige Gleichung $(*)$ genau eine Lösung x^* auf $[1, 4]$ besitzt.

b) Geben Sie eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ aus $[1, 4]$ an, welche gegen x^* konvergiert. Bestimmen Sie ferner für festes $\varepsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit

$$|x_k - x^*| \leq \varepsilon.$$

Hinweis: Es reicht, eine Ungleichung für k herzuleiten.

Folge:

$k \geq$

Rechnungen und Begründungen:

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Die 2π-periodische Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} (\sin x)^2, & \text{falls } x \in [0, \pi), \\ -(\sin x)^2, & \text{falls } x \in [-\pi, 0). \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Menge M aller Punkte, in denen f und die zugehörige Fourierreihe übereinstimmen.

$$\boxed{M = \qquad\qquad}$$

b) Zeigen Sie, dass die Fourierreihe $S(f,t)$, $t \in \mathbb{R}$, von f durch

$$S(f,t) = -\frac{8}{\pi} \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{\sin(nt)}{n(n^2-4)}$$

gegeben ist.

Hinweis: Benutzen Sie ohne Beweis für $n \neq 2$

$$\int_0^x \sin(nt)(\sin t)^2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2-4} \left(2\sin(nx)\cos x \sin x - n\cos(nx)(\sin x)^2 + \frac{2}{n}(\cos(nx) - 1) \right).$$

c) Begründen Sie die Gleichung

$$2\cos(t) \cdot |\sin(t)| = -\frac{8}{\pi} \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{\cos(nt)}{n^2-4}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Rechnungen und Begründungen:

Aufgabe 3 (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem von

$$y^{(3)}(x) - 2y^{(2)}(x) - 4y'(x) + 8y(x) = 0.$$

b) Bestimmen Sie alle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y^{(3)}(x) - 2y^{(2)}(x) - 4y'(x) + 8y(x) = \mathrm{e}^{-x},$$

für welche $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ und $y(0) > 0$ gelten.

$y(x) =$

Rechnungen und Begründungen:

Aufgabe 4 (6 Punkte)

a) Betrachten Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sin(y(x) + x^2), \qquad x \in [0,2], \\ y(1) &= 2. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass obiges Anfangswertproblem genau eine Lösung $y : [0,2] \to \mathbb{R}$ besitzt.

b) Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden linearen Systems von Differentialgleichungen.

$$\vec{y}\,'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{y}(x).$$

Rechnungen und Begründungen: