Lösung zu Aufgabe 1

a) Betrachte die stetig diff'bare Abbildung

$$f(x) := \sqrt{x} - \mathrm{e}^{-x} + 1, \qquad x \in [1,4].$$

Es gelten für $x \in [1,4]$

$$f(x) \geq \sqrt{x} - 1 + 1 \geq \sqrt{1} = 1$$

und

$$f(x) \leq \sqrt{x} + 1 \leq \sqrt{4} + 1 \leq 4.$$

Ferner ist für $z \in [1,4]$

$$|f'(z)| = \frac{1}{2\sqrt{z}} + \mathrm{e}^{-z} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{e} =: q < 1.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert für $1 \leq x < y \leq 4$ ein $z \in (x,y)$ mit

$$|f(x) - f(y)| = |f'(z)| \cdot |x - y| \leq q \cdot |x - y|.$$

Der Banachsche Fixpunktsatz liefert nun eine eindeutige Lösung x^* von $f(x) = x$ auf $[1,4]$. Das ist die Behauptung.

b) Wir setzen $x_0 := 1$ und rekursiv

$$x_{n+1} := f(x_n), \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Nach Vorlesung konvergiert (x_n) gegen x^*. Ferner gilt

$$|x^* - x_k| \leq \frac{q^k}{1-q} \cdot |x_1 - x_0| = \frac{q^k}{1-q} \cdot (1 - \mathrm{e}^{-1}).$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned} \frac{q^k}{1-q} \cdot (1 - \mathrm{e}^{-1}) \leq \varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad q^k \leq \frac{(1-q)\varepsilon}{1 - \mathrm{e}^{-1}} \\ &\Leftrightarrow \quad k \geq \frac{\ln(1-q) + \ln(\varepsilon) - \ln(1 - \mathrm{e}^{-1})}{\ln q}. \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2

a) Die Abbildung f ist stetig und (stückweise) stetig differenzierbar, somit gilt $M = \mathbb{R}$.

b) Die Abbildung f ist ungerade, insbesondere gilt

$$a_n = 0,\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Für $n \neq 2$ ist unter Beachtung von $\sin(n\pi) = \sin(0) = 0$ sowie $\cos(n\pi) = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, gemäß Hinweis

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(nt)(\sin t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{4}{n(n^2-4)\pi}(\cos(n\pi){-}1) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } n \text{ gerade,} \\ -\frac{8}{n(n^2-4)\pi}, & \text{wenn } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Den Fall $n = 2$ betrachten wir gesondert und benutzen $\sin(2t) = 2\cos t \sin t$:

$$b_2 = \frac{4}{\pi}\int_0^\pi \cos t(\sin t)^3\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}(\sin t)^4\Big|_0^\pi = 0.$$

Somit

$$S(f,t) = -\frac{8}{\pi}\sum_{n \text{ ungerade}} \frac{\sin(nt)}{n(n^2-4)}.$$

c) Es ist f diff'bar und

$$t \mapsto f'(t) = 2\cos(t)\cdot|\sin(t)|$$

stetig und stückweise stetig diff'bar. Folglich gilt

$$S(f',\cdot) = f'.$$

Ferner ergibt sich $S(f',\cdot)$ durch gliedweises Differenzieren von $S(f,\cdot)$, was zusammen mit b) die Behauptung zeigt.

Alternativ: die rechte Seite der zu zeigenden Gleichung konvergiert gleichmäßig, somit ergibt sich $S(f,\cdot)'$ durch gliedweises Differenzieren von $S(f,\cdot)$. Wir erhalten nach b)

$$\text{linke Seite } = f'(t) = S(f,t)' = \text{rechte Seite }.$$

Lösung zu Aufgabe 3

a) Das charakteristische Polynom ist gegeben durch

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda + 8.$$

Es ist $P(2) = 0$. Polynomdivision durch $(\lambda - 2)$ liefert

$$P(\lambda) = (\lambda^2 - 4)(\lambda - 2) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 2).$$

Ein Fundamentalsystem ist somit gegeben durch

$$y_1(x) := \mathrm{e}^{2x}, \qquad y_2(x) = x\mathrm{e}^{2x}, \qquad y_3(x) = \mathrm{e}^{-2x}.$$

b) Für eine partikuläre Lösung wählen wir den Ansatz

$$\bar{y}(x) := a\mathrm{e}^{-x}.$$

Einsetzen liefert nach Division durch e^{-x}

$$-a - 2a + 4a + 8a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{9}.$$

Alle Lösungen y der inhomogenen Diff'gleichung lassen sich beschreiben durch

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2x\mathrm{e}^{2x} + c_3\mathrm{e}^{-2x} + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{9}.$$

Die Bedingung $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ liefert

$$c_1 = c_2 = 0.$$

Die Bedingung $y(0) > 0$ liefert

$$0 < y(0) = c_3 + \frac{1}{9} \quad \Leftrightarrow \quad c_3 > -\frac{1}{9}.$$

Die gesuchte Lösungsgesamtheit ist folglich gegeben durch

$$y(x) = c_3\mathrm{e}^{-2x} + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{9}, \qquad c_3 > -\frac{1}{9}.$$

Lösung zu Aufgabe 4

a) Die Funktion $f : [0,2] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \sin(y + x^2), \qquad (x,y) \in [0,2] \times \mathbb{R},$$

ist stetig. Ferner ist

$$f_y(x,y) = \cos(y + x^2), \qquad (x,y) \in [0,2] \times \mathbb{R}.$$

Für $x, y, z \in \mathbb{R}^d$ existiert nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechung ein $w \in \mathbb{R}$ mit

$$|f(x,y) - f(x,z)| = |f_y(x,w)| \cdot |y - z| = |\cos(w + x^2)| \cdot |y - z| \leq L \cdot |y - z|$$

mit $L := 1$. Aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf folgt die Behauptung.

b) Wir berechnen die Eigenwerte der zugehörigen Matrix (im Folgenden A).

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} &= (1-\lambda)^3 + 2 - 3(1-\lambda) \\
&= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 + 2 - 3 + 3\lambda \\
&= -\lambda^3 + 3\lambda^2 = \lambda^2(3-\lambda).
\end{aligned}$$

Ein Eigenvektor für $\lambda = 3$ (Vielfachheit 1) berechnet sich wegen

$$A - 3E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

zu $\vec{x}_1 := (1,1,1)$. Die Matrix A ist symmetrisch, zwei linear unabhängige Eigenvektoren zu $\lambda = 0$ (Vielfachheit 2) sind somit durch $\vec{x}_2 := (1,-1,0)$ und $\vec{x}_3 := (0,1,-1)$ gegeben. Die Menge aller Lösungen ist nun gegeben durch

$$\vec{y}(x) = c_1 \mathrm{e}^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$