Aufgabe 4/1 (6 Punkte)

Zu festem $a \in (1,2)$ soll die eindeutig bestimmte positive Lösung x der Gleichung

$$x^2 = a$$

approximiert werden. Dazu betrachten wir auf $[1,2]$ die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{a}{x} \\ f_2(x) &= \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}), \end{aligned}$$

und untersuchen sie im Folgenden auf Kontraktivität.

1. Zeigen Sie, dass jede dieser Funktionen den Fixpunkt $\sqrt{a}$ besitzt.
2. Zeigen Sie, dass f_1 keine Kontraktion auf $[1,2]$ ist.
3. Zeigen Sie, dass f_2 eine Kontraktion auf $[1,2]$ mit Kontraktionskonstante $\frac{1}{2}$ ist.
4. Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge

   $$x_0 := 1, \quad x_{n+1} := f_2(x_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

   die Abschätzung

   $$|x_n - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2^n}|1 - \sqrt{a}|, \quad n \in \mathbb{N},$$

   erfüllt.
5. Bestimmen Sie zu festem $k \in \mathbb{N}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für jedes $n \geq n_0$

   $$|x_n - \sqrt{a}| \leq 2^{-k}$$

   ausfällt.

Lösung:

Lösung:

1. (1P) Es ist

$$\begin{aligned} f_1(\sqrt{a}) &= \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a} \\ f_2(\sqrt{a}) &= \frac{1}{2}(\sqrt{a} + \frac{a}{\sqrt{a}}) = \sqrt{a}. \end{aligned}$$

2. (1.5P) Möglichkeit 1: Wäre f_1 eine Kontraktion auf $[1,2]$ mit Kontraktionskonstante q, so wäre notwendig

$$|f_1'(x)| \leq q < 1, \quad x \in [1,2].$$

Hier ist aber zum Beispiel

$$|f_1'(1)| = |-\frac{a}{1^2}| = a > 1.$$

Widerspruch.

Möglichkeit 2: f_1 ist keine Selbstabbildung von $[1,2]$: Es ist

$$f_1(2) = \frac{a}{2},$$

und wegen $a \in (1,2)$ ist also $f_1(2) \in (\frac{1}{2}, 1)$ und also $f_1(2) \notin [1,2]$.

Möglichkeit 3: Wegen $1 < a < 2$ finden wir ein $\epsilon > 0$, so dass sowohl $x := \sqrt{a} - \epsilon \in [1,2]$ als auch $y := \sqrt{a} + \epsilon \in [1,2]$ ist. Für diese speziellen $x, y \in [1,2]$ gilt $xy = a - \epsilon^2$ und also

$$|f_1(x) - f_1(y)| = |\frac{a}{x} - \frac{a}{y}| = \frac{a}{|xy|}|y - x| = \frac{a}{a - \epsilon^2}|y - x| \geq |x - y|.$$

Damit ist für f_1 die Definition von Kontraktivität auf $[1,2]$ verletzt. (Es gibt noch viele andere Möglichkeiten, x, y passend zu wählen.)

3. (1.5P) Für $x, y \in [1,2]$ gilt

$$|f_2(x) - f_2(y)| = \frac{1}{2}|(x - y) + (\frac{a}{x} - \frac{a}{y})| = \frac{1}{2}|(x - y) + a\frac{y - x}{xy}| = \frac{1}{2}|x - y||1 - \frac{a}{xy}|.$$

Wegen $\frac{a}{xy} \in (0,2)$ folgt damit $|1 - \frac{a}{xy}| < 1$ und also

$$|f_2(x) - f_2(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$

4. (1P) Es gilt

$$\begin{aligned} |x_n - \sqrt{a}| &= |f_2(x_{n-1}) - f_2(\sqrt{a})| \leq \frac{1}{2}|x_{n-1} - \sqrt{a}| \\ &\leq \ldots \leq \frac{1}{2^n}|x_0 - \sqrt{a}| = \frac{1}{2^n}|1 - \sqrt{a}|. \end{aligned}$$

5. (1P) Es gilt

$$|x_n - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2^n}|1 - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Also ist $n_0 := k$ passend, denn für jedes $n \geq n_0 = k$ gilt dann

$$|x_n - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^k}.$$

Aufgabe 4/2 (6 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei $2\pi-$periodisch und habe auf $[-\pi, \pi)$ die Form

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \\ 0, & \text{falls } x \in [-\pi, \pi) \setminus (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}). \end{cases}$$

1. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten a_n und b_n von f.

$a_n =$

$b_n =$

Hinweis: Die entstehenden Sinus- und Kosinusterme müssen nicht vereinfacht werden.

2. Geben Sie die Fourierreihe $S(f; x), x \in \mathbb{R}$, von f an.

$S(f; x) =$

3. Geben Sie mit Begründung die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ an, für die

$$S(f; x) = f(x) \tag{1}$$

gilt.

Hinweis: In welchen Punkten besitzt f die Mittelwerteigenschaft?

4. Leiten Sie die Formel

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

ab.
Hinweis: Betrachten Sie $S(f; \frac{\pi}{2})$.

Lösung:

Lösung:

1. (2P) f ist offenbar ungerade, weshalb

$$a_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Für die b_n erhalten wir $b_0 = 0$ und für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) f(x) dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nx) x dx \\
&= -\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\cos(nx)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{n}\cos(nx)dx \\
&= -\frac{1}{n}\cos(n\frac{\pi}{2}) + \frac{2}{\pi n}\frac{1}{n}\sin(nx)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{1}{n}\cos(n\frac{\pi}{2}) + \frac{2}{\pi n^2}\sin(n\frac{\pi}{2}).
\end{aligned}$$

2. (1P) Die zugehörige Fourierreihe ergibt sich damit zu

$$S(f;x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n}\cos(n\frac{\pi}{2}) + \frac{2}{\pi n^2}\sin(n\frac{\pi}{2}))\sin(nx).$$

3. (1.5P) f ist in jedem $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ offenbar stetig, insbesondere gilt hier die Mittelwerteigenschaft. Ist $x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, so gilt

$$\frac{1}{2}(f(x-) + f(x+)) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + 0) = \frac{\pi}{4}, & \text{falls } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2}(-\frac{\pi}{2} + 0) = -\frac{\pi}{4}, & \text{falls } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

und wegen $f(x) = 0$ gilt die Mittelwerteigenschaft hier nicht. Für $x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ ist f differenzierbar, weshalb (1) hier gilt. Ist $x \in \{\frac{\pi}{2}+k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, so ist f bei x unstetig, und es ist $S(f,x) = \pm\frac{\pi}{4} \neq 0 = f(x)$. Die gesuchte Menge ist also

$$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

4. (1.5P) Wie gezeigt ist $S(f;\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4}$. Die linke Seite ergibt sich hier zu

$$S(f;\frac{\pi}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n}\cos(n\frac{\pi}{2}) + \frac{2}{\pi n^2}\sin(n\frac{\pi}{2}))\sin(n\frac{\pi}{2}),$$

und wegen $\sin(n\frac{\pi}{2})\cos(n\frac{\pi}{2}) = 0, n \in \mathbb{N}$, $\sin(n\frac{\pi}{2})^2 = 1$ für ungerades n und $\sin(n\frac{\pi}{2})^2 = 0$ für gerades n ergibt dies

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k+1)^2} = S(f;\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4},$$

und also die gewünschte Formel.

Aufgabe 4/3 (6 Punkte)

1. Welche Struktur hat die Lösungsmenge M_{hom} einer homogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung?

2. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem zur folgenden homogenen linearen Differentialgleichung 4. Ordnung.
$$y^{(4)}(x) - 2y''(x) + y(x) = 0 \tag{2}$$

   Beschreiben Sie mit diesem Fundamentalsystem die Lösungsmenge M_{hom} von (2).

   $M_{hom} =$

3. Bestimmen Sie nun die Lösungsmenge M_{part} des folgenden inhomogenen Problems
$$y^{(4)}(x) - 2y''(x) + y(x) = x. \tag{3}$$

   $M_{part} =$

   Bestimmen Sie eine spezielle Lösung $f(x)$ von (3), die den zusätzlichen Forderungen
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0,$$
   genügt.

   $f(x) =$

Lösung:

Lösung:

1. (1P) M_{hom} hat die Struktur eines Vektorraumes der Dimension n.
2. (2P) Das charakteristische Polynom ist gegeben durch
$$p(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2.$$
Die jeweils doppelten Nullstellen 1 und -1 führen zu folgendem möglichen Fundamentalsystem
$$\{e^x, xe^x, e^{-x}, xe^{-x}\}$$
und alle Lösungen sind gegeben durch die Menge
$$M_{hom} = \{x \mapsto a_1e^x + a_2xe^x + a_3e^{-x} + a_4xe^{-x} : a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\}.$$
3. (3P) Offenbar ist $f(x) = x$ eine spezielle Lösung von (3) und alle Lösungen von (3) lassen sich also schreiben als
$$M_{part} = \{x \mapsto x + a_1e^x + a_2xe^x + a_3e^{-x} + a_4xe^{-x} : a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\}.$$
Jede Lösung $f(x)$ ist also von der Form
$$f(x) = x + a_1e^x + a_2xe^x + a_3e^{-x} + a_4xe^{-x}, \quad a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}.$$
Wegen
$$\frac{f(x)}{x} = 1 + a_1\frac{e^x}{x} + a_2e^x + a_3\frac{e^{-x}}{x} + a_4e^{-x}, \quad a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0,$$
ist die Forderung $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ genau dann erfüllt, falls $a_1, a_2 = 0$ sind. Die Forderung $f(0) = 1$ ergibt dann $a_3 = 1$, und die letzte Forderung $f'(0) = 0$ erzwingt $a_4 = 0$. Damit ist
$$f(x) = x + e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4/4 (6 Punkte)

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem zur Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\begin{aligned} y' &= xy =: f(x,y), \quad x \in \mathbb{R}, && (4) \\ y(0) &= c, && (5) \end{aligned}$$

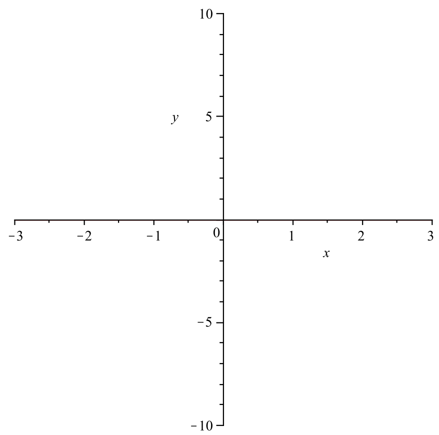
wobei $c \in \mathbb{R}$ fest gewählt sei.

1. Bestimmen Sie für jedes $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung y_c des Anfangswertproblems (4),(5) mit maximalem Definitionsbereich.

   $y_c(x) =$

   Hinweis: Benutzen Sie die Methode der Trennung der Veränderlichen.

2. Skizzieren Sie y_c in folgendem Koordinatensystem für $c = 1, c = 0, c = -1$.



3. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto f(x,y)$$

   auf jedem Streifen $S = [a,b] \times \mathbb{R}, a < 0 < b, a,b \in \mathbb{R}$, einer Lipschitzbedingung in der zweiten Komponente genügt.

4. Folgern Sie aus 3., dass für $a < 0 < b, a,b \in \mathbb{R}$, jedes Anfangswertproblem der Form

$$\begin{aligned} y' &= xy, \quad x \in [a,b], \\ y(0) &= c, \quad c \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

   eindeutig auf $[a,b]$ lösbar ist.

5. Schliessen Sie aus 4., dass es höchstens eine globale Lösung y_c des Anfangswertproblems (4),(5) auf ganz $\mathbb{R}$ geben kann.
   Hinweis: Nehmen Sie dazu die Existenz zweier verschiedener globaler Lösungen an.

Lösung:

Lösung:

1. (2P) Die Methode der Trennung der Veränderlichen liefert formal

$$\frac{1}{y}dy = xdx$$

und anchließende Integration dann

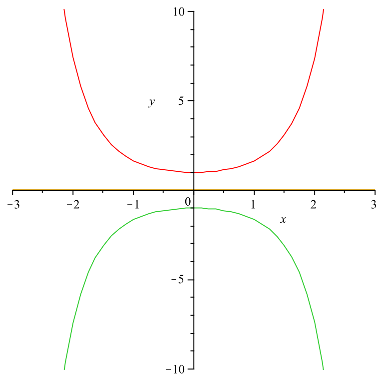
$$\ln(|y|) = \frac{1}{2}x^2 + a$$

für ein $a \in \mathbb{R}$. Damit gilt für ein $\tilde{a} \in [0, \infty)$

$$y = \pm\tilde{a}e^{\frac{1}{2}x^2} =: \tilde{\tilde{a}}e^{\frac{1}{2}x^2}$$

für $\tilde{\tilde{a}} \in \mathbb{R}$. Die Anfangsbedingung $y(0) = c$ liefert dann $\tilde{\tilde{a}} = c$. Man überzeugt sich leicht, dass $y_c(x) = ce^{\frac{1}{2}x^2}$ das gegebene Anfangswertproblem zu $c \in \mathbb{R}$ auf ganz $\mathbb{R}$ löst.

2. (1P) Die Fälle $c = 1, 0, -1$ sind im folgenden Schaubild in den Farben rot, gelb, grün eingezeichnet:



3. (1P) Für $x \in [a, b]$ und $y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$|f(x, y) - f(x, z)| = |x||y - z| \leq \max\{|a|, |b|\}|y - z|. \tag{6}$$

4. (1P) f ist auf jedem Streifen der Form $[a, b] \times \mathbb{R}$ stetig und genügt wie gezeigt in der zweiten Komponente einer Lipschitzbedingung. Damit ist das Anfangswertproblem auf $[a, b]$ eindeutig lösbar durch gewisse $y_{[a,b]}$ nach der globalen Variante des Satzes von Picard-Lindelöff.

5. (1P) Sind y_1, y_2 zwei verschiedene globale Lösungen des AWP, so finden wir stets ein Intervall der Form $[a, b], a < 0 < b$, auf dem y_1, y_2 ebenso verschieden sind. Damit hätten wir aber auf $[a, b]$ zwei verschiedene Lösungen des AWP - Widerspruch.