Institut für Stochastik
Prof. Dr. G. Last · Dipl.-Math. S. Ziesche

Räumliche Stochastik SoSe 2015

Übungsblatt 1

Die Übungsaufgaben werden am **Freitag, den 24. April 2015**, in den Übungen behandelt.

Aufgabe 1.1: *Satz 1.1.2*

Sei $(E, \mathcal{O}_E)$ ein lokalkompakter Hausdorffraum mit abzählbarer Basis. Dann gilt:

2. $\mathcal{F}' := \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ mit der Spurtopologie ist lokalkompakt.
3. $\{\mathcal{F}^C \mid C \in \mathcal{C}\}$ ist eine Umgebungsbasis von $\emptyset$.

Aufgabe 1.2: *Satz 1.1.3*

Sei $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{F}(E)$ und $F \in \mathcal{F}(E)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $F_i \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} F$.

(b) $b_1)$ $G \in \mathcal{G}$, $G \cap F \neq \emptyset \implies G \cap F_i \neq \emptyset$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$,
$b_2)$ $C \in \mathcal{C}$, $C \cap F = \emptyset \implies C \cap F_i = \emptyset$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$.

(c) $c_1)$ Für alle $x \in F$ gilt: für fast alle $i \in \mathbb{N}$ existiert ein $x_i \in F_i$, so dass $x_i \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} x$.
$c_2)$ Ist $(i_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, $x_{i_j} \in F_{i_j}$ und $x_{i_j} \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} x$, so gilt $x \in F$.

Nutzen Sie eine der Äquivalenzen um zu zeigen, dass die Abbildung

$$\theta : (\mathbb{R}^d, \mathcal{F}(\mathbb{R}^d)) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^d),\ (x, F) \mapsto F + x$$

stetig ist.

Aufgabe 1.3:

Zeigen Sie:

a) Sei $\xi : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ ein Zufallsvektor. Dann ist $Z := \{\xi\}$ eine zufällige abgeschlossene Menge (ZAM).

b) Sei $\xi_1, \xi_2, \ldots$ eine Folge von Zufallsvektoren auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $\{\xi_i(\omega) : i \in \mathbb{N}\}$ habe keinen Häufungspunkt in $\mathbb{R}^n$ (für alle $\omega \in \Omega$). Dann ist $Z := \{\xi_i : i \geq 1\}$ eine zufällige abgeschlossene Menge.

c) Sei $R : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ eine positive Zufallsvariable und $\xi : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ ein Zufallsvektor. Dann ist die zufällige Kugel Z mit Mittelpunkt ξ und Radius R, also $Z := B(\xi, R)$, eine zufällige abgeschlossene Menge.

Aufgabe 1.4: *Proposition 1.3.2 (c)*

Zeigen Sie

$$S_k(C_0; C_1, \ldots, C_k) = \mathbb{P}_Z[\mathcal{F}^{C_0}_{C_1,\ldots,C_k}]$$

für $k \in \mathbb{N}$, $C_i \in \mathcal{C}$