# Portfoliooptimierung mit stoch. Steuerung

Sebastian Urban

Seminar Finanzmathematik, 17. Dezember 2009

## 1 Stochastische Steuerprobleme

Es seien $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $d, n, m \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen, $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq t_0 < t_1 < \infty$. $X := (X(t))_{t\in[t_0,t_1]}$ sei $n$-dimensionaler Itô-Prozess, $W := (W(t))_{t\in[t_0,t_1]}$ $m$-dimensionale Brownsche Bewegung mit natürlicher Filtration $\mathcal{F} := (\mathcal{F}_t))_{t\in[t_0,t_1]}$. Setze

$$\begin{aligned}
&Q := [t_0, t_1) \times O,\\
&\overline{Q} := [t_0, t_1] \times \overline{O},\\
&\tau := \inf \{t \geq t_0 \mid (t, X(t)) \notin Q\},\\
&\partial^* Q := ([t_0, t_1) \times \partial O) \cup \left(\{t_1\} \times \overline{O}\right),\\
&u : [t_0, t_1] \times \Omega \to U,\\
&\mu : \overline{Q} \times U \to \mathbb{R}^n,\\
&\sigma : \overline{Q} \times U \to \mathbb{R}^{n\times m}.
\end{aligned}$$

**Definition 1.1** Genügt $X$ der Form

$$dX(t) = \mu\,(t, X(t), u(t))\,dt + \sigma\,(t, X(t), u(t))\,dW(t),\ \ X(t_0) = x, \tag{GSD}$$

spricht man von einer **gesteuerten stochastischen Differentialgleichung**. $u(t)$ heißt **zulässige Steuerung**, wenn

- sie progressiv messbar ist bezüglich $\mathcal{F}$,
- (GSD) für diese Steuerung und für alle $x \in O$ eindeutig lösbar ist,
- $\mathbb{E}\left[\int_{t_0}^{t_1} \|u(s,\cdot)\|^k ds\right] < \infty$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ und ebenso
- $\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[t,t_1]} \left\{|X(s)|^k\right\} \;\middle|\; X(t) = x\right] < \infty \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Bezeichne mit $A(t, x)$ die Menge aller zulässigen Steuerungen mit Startwert $(t, x) \in Q$.

**Strukturannahme:** Hier gelte mit Euklidscher Norm $\|\cdot\|$ und Spektralnorm $\|\cdot\|_\rho$

$$\begin{aligned}
&\|\mu(t, x, u)\| + \|\sigma(t, x, u)\|_\rho \leq C \cdot (1 + \|x\| + \|u\|),\\
&\|\mu_t(t, x, u)\| + \|\mu_x(t, x, u)\| \leq C,\\
&\|\sigma_t(t, x, u)\|_\rho + \|\sigma_x(t, x, u)\|_\rho \leq C,\\
&(t, x) \mapsto \mu(t, x, u),\ (t, x) \mapsto \sigma(t, x, u) \in C^1(\overline{Q}) \quad \forall u \in U
\end{aligned}$$

Um die Qualität einer Steuerung zu beurteilen, führt man Kostenfunktionale ein, die während der Laufzeit laufende Kosten angeben sowie den ersteuerten Endwert bewerten. Seien dazu $L : \overline{Q} \times U \to \mathbb{R}$ die **laufenden Kosten** in Abhängigkeit von Zeit, Wert und Steuerung und $\Psi : \overline{Q} \to \mathbb{R}$ die **terminalen Kosten** zum Steuerungsende $\tau$ mit Endwert $X(\tau)$.

**Definition 1.2** Genügen $L$ und $\Psi$ für $k \in \mathbb{N}$ und $C > 0$ den Wachstumsbedingungen

$$\begin{aligned} |L(t,x,u)| &\leq C \cdot (1 + \|x\|^k + \|u\|^k) \quad \forall (t,x,u) \in \overline{Q} \times U \text{ und} \\ |\Psi(t,x)| &\leq C \cdot (1 + \|x\|^k) \quad \forall (t,x) \in \overline{Q}, \end{aligned}$$

definiert man das **Kostenfunktional**

$$J(t,x;u(t)) := \mathbb{E}\left[ \int_t^\tau L(s,X(s),u(s))ds + \Psi(\tau, X(\tau)) \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right].$$

Das **stochastische Steuerproblem** ist dann

$$\min_{u(\cdot) \in A(t_0,x)} \{J(t_0,x;u)\}. \tag{SSP}$$

## 2 Lösungsansatz von Hamilton, Jacobi und Bellman

Zu Startparametern $t \in [t_0, t_1)$ und $x \in O$ gibt

$$V(t,x) := \inf_{u(\cdot) \in A(t,x)} \{J(t,x;u)\}$$

die Kosten des dort gestarteten Steuerproblems an. Sei $\mathbb{E}^{t,x}[\dots] := \mathbb{E}[\dots | X(t) = x]$.

**Proposition 2.1 (Bellmans Prinzip)**
*Für jedes $t \in [t_0, t_1)$, $x \in O$ und jede Stoppzeit $\theta$ mit $t \leq \theta(\omega) \leq \tau(\omega)$ $\forall \omega \in \Omega$ gilt*

$$V(t,x) = \inf_{u(\cdot) \in A(t,x)} \left\{ \mathbb{E}^{t,x}\left[ \int_t^\theta L(s,X(s),u(s))ds + V(\theta, X(\theta)) \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right] \right\}. \tag{B}$$

*„Jede Gesamtlösung von (SSP) ist auch zwischenzeitlich optimal."*

In (SSP) ist als Lösung ein stochastischer Prozess $(u(t))$ aufzufinden, der bezüglich $J$ optimal steuert. Die Idee ist nun, dieses Problem in ein deterministisches zu überführen.

(i) Wende die Itô-Formel auf den Prozess $X$ und die Funktion $\theta \mapsto V(\theta, X(\theta))$ an:

$$\begin{aligned} V(\theta, X(\theta)) &= V(0, X(0)) + \int_0^\theta V_t(s,X(s))ds + \sum_{i=1}^n \int_0^\theta V_{x_i}(s,X(s))dX_i(s) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^\theta V_{x_i,x_j}(s,X(s))d\langle X_i, X_j\rangle(s) \\ &= V(t, X(t)) + \int_t^\theta V_t(s,X(s))ds + \sum_{i=1}^n \int_t^\theta V_{x_i}(s,X(s))dX_i(s) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_t^\theta V_{x_i,x_j}(s,X(s))d\langle X_i, X_j\rangle(s). \end{aligned}$$

Für $i,j \in \{1,\dots,m\}$ gilt $d\langle X_i, X_j\rangle(s) = [\sigma\sigma']_{i,j}(s,X(s),u(s))ds$. Eingesetzt in (B) ist der Wert $V(t,X(t)) = V(t,x)$ bekannt und kann äquivalent auf beiden Seiten subtrahiert werden:

$$\begin{aligned} 0 &= \inf_{u(\cdot) \in A(t,x)} \left\{ \mathbb{E}^{t,x}\left[ \int_t^\theta L(s,X(s),u(s))ds + \sum_{i=1}^n \int_t^\theta V_{x_i}(s,X(s))dX_i(s) \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \int_t^\theta V_t(s,X(s))ds + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_t^\theta V_{x_i,x_j}(s,X(s))[\sigma\sigma']_{i,j}(s,X(s),u(s))ds \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right] \right\}. \end{aligned}$$

(ii) Die einzelnen Prozesse $X_i$ erfüllen

$$dX_i = \mu_i(t, X(t), u(t))dt + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}(t, X(t), u(t))dW_j(t).$$

Nimmt man an, dass für beliebige $(x,u) \in O \times U$ die Abbildungen $t \mapsto \sigma_{ij}(t,x,u)$ im Raum $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ liegen, ist das stochastische Integral ein $\mathbb{P}$-Martingal. In diesem Fall bleibt nach Einsetzen in (B) die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & \inf_{u(\cdot)\in A(t,x)} \Bigg\{ \mathbb{E}^{t,x} \Bigg[ \int_t^\theta L(s, X(s), u(s))ds + \sum_{i=1}^{n} \int_t^\theta V_{x_i}(s, X(s))\mu_i(s, X(s), u(s))ds \\ & + \int_t^\theta V_t(s, X(s))ds + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_t^\theta V_{x_i,x_j}(s, X(s))[\sigma\sigma']_{i,j}(s, X(s), u(s))ds \;\Bigg|\; \mathcal{F}_t \Bigg] \Bigg\}. \end{aligned}$$

(iii) Wir bilden auf beiden Seiten den $\lim_{\theta \downarrow t}(\frac{1}{\theta - t}(\dots))$ und haben

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & \inf_{u(\cdot)\in A(t,x)} \Bigg\{ \mathbb{E}^{t,x} \Bigg[ L(t, X(t), u(t)) + \sum_{i=1}^{n} V_{x_i}(t, X(t))\mu_i(t, X(t), u(t)) \\ & + V_t(t, X(t)) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} V_{x_i,x_j}(t, X(t))[\sigma\sigma']_{i,j}(t, X(t), u(t)) \;\Bigg|\; \mathcal{F}_t \Bigg] \Bigg\}. \end{aligned}$$

Nun ist nach Bedingung $X(t) = x$ und $u(t)$ ist $\mathcal{F}_t$-messbar, etwa $u(t) = u$ für ein $u$, über welches das Infimum gebildet werden soll. Damit ist kein Zufall mehr enthalten, es entfällt die Erwartungswertbildung und insbesondere ist nur noch bezüglich einer reellen Zahl zu optimieren.

Die Bewertung des Endnutzens haben wir bisher noch nicht beachtet. Nimmt man diese als Randbedingung hinzu, erhält man ein verwandtes deterministisches Optimierungsproblem.

**Definition 2.2** Für $v : \overline{Q} \to \mathbb{R}$ und $(t,x,u) \in Q \times U$ definiere den **Hamilton-Operator**

$$\mathcal{A}^u v(t,x) := v_t(t,x) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i(t,x,u) v_{x_i}(t,x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} [\sigma\sigma']_{i,j}(t,x,u) v_{x_i,x_j}(t,x).$$

Das zu (SSP) gehörende **HJB-Problem** ist dann

$$\begin{aligned} \inf_{u\in U} \{\mathcal{A}^u v(t,x) + L(t,x,u)\} = 0 \quad \forall (t,x) \in Q, \\ v(t,x) = \Psi(t,x) \quad \forall (t,x) \in \partial^* Q. \end{aligned} \tag{HJB}$$

Eine mit dem (HJB)-Ansatz gefundene Lösung ist nicht notwendig eine Lösung von (SSP), die Verifikation muss man im Einzelfall noch leisten. [KK01] diskutiert in Kapitel V einige solche Verifikationstheoreme, weitere finden sich in [FS93].

# 3 Anwendung in der Portfoliooptimierung

Statt unter Kosten zu minimieren, kann man unter Nutzen maximieren. In der Finanzmathematik möchte man häufig das durch Handeln am Markt erwirtschaftete Endvermögen bzw. den dadurch erworbenen Nutzen maximieren, gegebenenfalls noch unter Bewertung von zwischenzeitlichem Konsum. Gesteuert wird hier eine Vermögensgleichung durch Wahl der Portfoliostrategie. Im Black-Scholes

Markt folgt das Vermögen $X$ der Dynamik

$$dX_t^{(\pi,c)} = \left[X_t^{(\pi,c)}\left(\pi_t'\left(\mu_t - r_t\mathbb{1}\right) + r_t\right) - c_t\right]dt + \left[X_t^{(\pi,c)}\pi_t'\sigma_t\right]dW_t, \tag{VG}$$

wobei der Investitions $\pi$ die Vermögensanteile in den $n$ Aktien modelliert, $\mu$ den Driftvektor der Papiere, $r$ den Marktzins und $c$ den Konsum. $W$ ist auch hier eine $m$-dimensionale, die Marktrisiken abbildende Brownsche Bewegung. Alle Prozesse sind an die natürliche Filtration von $W$ adaptiert, in der Portfoliooptimierung arbeitet man unter dem physischen Maß $\mathbb{P}$.
Wir steuern das Vermögen durch gezielte Investition und Konsum, d.h. hier ist $u(t) = (u_1(t), u_2(t)) = (\pi(t), c(t))$ und $U = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$. Der Zeithorizont ist endliche und die Kurse nichtnegativ, also $t_0 = 0$, $t_1 = T > 0$ und $O = \mathbb{R}_+^n$.
Als nächstes müssen wir uns für zwei Nutzenbewertungen $L$ und $\Psi$ entscheiden, $L$ sei wie oben der Nutzen aus dem fortwährenden Konsum und $\Psi$ der Endnutzen aus dem terminalen Vermögen. Das stochastische Steuerproblem ist dann

$$\begin{aligned} J(t,x;u(\cdot)) &= \mathbb{E}^{t,x}\left[\int_t^\tau L(s,X(s),c(s))ds + \Psi(\tau, X(\tau))\right], \\ V(t,x) &= \sup_{u(\cdot)\in A(t,x)} \{J(t,x;u(\cdot)\} \end{aligned}$$

und das zugehörige (HJB)-Problem formuliert sich zu

$$\sup_{(\pi,c)\in U}\left\{\mathcal{A}^{(\pi,c)}v(t,x) + L(t,x,c)\right\} = 0 \quad \forall (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}_+^n,$$

$$v(T,x) = \Psi(T,x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n.$$

**Satz 3.1 (Log-Problem)**
*Im Black-Scholes Markt besitzt das Investitions-Konsum-Problem des Investors mit logarithmischem Nutzen die eindeutige Lösung*

$$\pi_t^* = \left(\sigma_t\sigma_t'\right)^{-1}\left(\mu_t - r_t\right), \; c_t^* = \frac{1}{T-t+1}X_t^{(\pi,c)}$$

*und die Wertfunktion*

$$V(t,x) = (T-t+1)\left(1 - rt + \log(x) - \log(T-t+1)\right) - \left(r - \frac{1}{2}\right)t^2 + t.$$

**Beweis** Siehe Tafel oder z.B. [KK01, Kapitel V.2].

## Literatur


[Bä09] N. Bäuerle. *Skriptum Steuerung Stochastischer Prozesse.* Universität Karlsruhe, Sommersemester 2009.

[FS93] W. H. Fleming and M. H. Soner. *Controlled Markov Processes and viscosity Solutions.* Springer, Berlin, 1993.

[KK01] R. Korn and E. Korn. *Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung.* Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 2nd edition, October 2001.