HJB-Ansatz:

$$0 = \sup_{(\pi,c)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+} \left\{ \mathcal{A}^{(\pi,c)} v(t,x) + \log(c)\right\}, \quad (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}_+^n,$$

$$v(T,x) = \log(x), \quad x\in\mathbb{R}_+^n$$

In Kurznotation:

$$0 = v_t + \left(x\left(\pi'(\mu - \mathbb{1}r) + r\right) - c\right)\cdot v_x + \frac{1}{2} x^2 (\pi'\sigma)(\pi'\sigma)' v_{xx} + \log(c)$$

$$= \pi'\left(x(\mu-\mathbb{1}r)v_x\right) + \left(\frac{1}{2} x^2 \pi'\sigma\sigma'\pi\right)v_{xx} + \log(c) - c v_x + x r v_x + v_t \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial c}(1) = \frac{1}{c} - v_x = 0 \Leftrightarrow v_x = \frac{1}{c} \Leftrightarrow c^* = \frac{1}{v_x}, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial\pi}(1) = x(\mu-\mathbb{1}r)v_x + x^2\sigma\sigma' v_{xx}\pi = 0 \Leftrightarrow \pi^* = -\left(x^2\sigma\sigma' v_{xx}\right)^{-1} x(\mu-\mathbb{1}r)v_x$$

$$= -\frac{v_x}{x\cdot v_{xx}}(\sigma\sigma')^{-1}(\mu-\mathbb{1}r). \qquad (3)$$

In (1):

$$0 = -2\frac{v_x}{\cancel{x}\cdot v_{xx}}\left[(\sigma\sigma')^{-1}(\mu-\mathbb{1}r)\right]'\left(\cancel{x}(\mu-\mathbb{1}r)v_x\right) + \frac{1}{2}\cancel{x^2}\left(-2\frac{v_x}{\cancel{x\cdot v_{xx}}}\left[(\sigma\sigma')^{-1}(\mu-\mathbb{1}r)\right]'(\sigma\sigma')\right.$$

$$\left.\cdot\left(-2\frac{v_x}{\cancel{x}\cdot v_{xx}}(\sigma\sigma')^{-1}(\mu-\mathbb{1}r)\right)\right)\cancel{v_{xx}} + \log\left(\frac{1}{v_x}\right) - \frac{1}{\cancel{v_x}}\cancel{v_x} + x r v_x + v_t$$

$$= \underbrace{-2\frac{v_x^2}{v_{xx}}\left[(\sigma\sigma')^{-1}(\mu-\mathbb{1}r)\right]'(\mu-\mathbb{1}r) + 2\frac{v_x^2}{v_{xx}}\left[(\sigma\sigma')^{-1}(\mu-\mathbb{1}r)\right]'(\mu-\mathbb{1}r)}_{\emptyset} + \log\left(\frac{1}{v_x}\right) - 1$$

$$+ x r v_x + v_t$$

(4)

$$= v_t + x r v_x - \log(v_x) - 1$$

Ansatz für v:

Aus (2) gilt $c^* = \frac{1}{T-t+1}\, x \overset{!}{=} \frac{1}{v_x} \iff v_x = \frac{T-t+1}{x}$.

Daher $v = (T-t+1)\log(x) + h(t)$, $h(t)$ noch unbekannt. Man findet entsprechend

$v_t = h_t - \log(x)$, $\quad v_{xx} = -\frac{T-t+1}{x^2}$,

eingesetzt in (4) gilt

$$0 = h_t - \log(x) + xr\,\frac{T-t+1}{x} - \log\left(\frac{T-t+1}{x}\right) - 1 \iff$$

$$h_t = \log(T-t+1) + 1 - r(T-t+1) \iff$$

$$h = (T-t+1)(1-\log(T-t+1)) + t - r\left((T+1)t - \tfrac{1}{2}t^2\right). \qquad (+\text{Konstante})$$

Damit ist $v = (T-t+1)(1 - rt + \log(x) - \log(T-t+1)) - (r-\frac{1}{2})t^2 + t$ eine Lösung von (HJB). Es ergibt sich c^* wie gewünscht (s.o.) und

Verifikation: Sei $t \in [0,T)$, $x > 0$, $(\pi,c) \in \mathcal{A}(t,x)$.

$$\sup\{\mathcal{A}^{(\pi,c)} v(t,x) + \log(c)\} = 0 \Rightarrow \mathcal{A}^{(\pi,c)} v(t,x) \leq -\log(c). \quad (1)$$

Löst Itô:

$$v(T, X_T^{\pi,c}) = v(t,x) + \int_t^T \mathcal{A}^{(\pi_s,c_s)} v(s, X^{\pi,c}(s))\, ds + \underbrace{\int_t^T V_{x}(s, X(s))\, dW_j(s)}_{=: M(t,T)}$$

Vermögen $\in \mathbb{R}^1$ — m-dim. BB

$$\overset{(1)}{\leq} v(t,x) - \int_t^T \log(c_s)\, ds + M(t,T). \quad (2) \Leftrightarrow$$

$$M(t,T) \geq \underbrace{v(T, X_T^{\pi,c})}_{\geq 0} + \int_t^T \log(c_s)\, ds - v(t,x) \geq \int_t^T \log(c_s)\, ds - v(t,x). \quad (3)$$

Da $v_x \in \mathcal{H}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, ist $M(t,T)$ lokales Mg in T (hier ist sogar $v_x \in \mathcal{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, also M Mg).

Beschränkte lok. Mg sind Supermartingale, d.h.

$$\mathbb{E}^{t,x}[M(t,T)] \leq \mathbb{E}^{t,x}[M(t,t)] = 0. \quad (4)$$

Es folgt

$$\mathbb{E}^{t,x}[v(T, X_T^{\pi,c})] \overset{(2),(4)}{\leq} \mathbb{E}^{t,x}\left[v(t,x) - \int_t^T \log(c_s)\, ds\right]. \quad (5)$$

und damit

$$J(t,x;(\pi,c)) \underset{\text{def.}}{=} \mathbb{E}^{t,x}\left[\int_t^T \log(c_s)\, ds + \log(X_T^{\pi,c})\right] \underset{\text{Randbed. an } v}{=} \mathbb{E}^{t,x}\left[\int_t^T \log(c_s)\, ds + v(T, X_T^{\pi,c})\right]$$

$$\overset{(5)}{\leq} \mathbb{E}^{t,x}[v(t,x)] = v(t,x). \quad (6)$$

Da (π,c) beliebig gewählt wurde, ist auch

$$V(t,x) = \sup_{(\pi,c)} \{J(t,x;(\pi,c))\} \overset{(6)}{\leq} v(t,x) \quad (7).$$

Wählt man speziell (π^*, c^*) als Steuerung, gilt in (1) Gleichheit, also auch in (2). Wie vorhin bemerkt, gilt in (4) Gleichheit, denn wir haben ein echtes Mg, und das genügt für Gl in (7).
Es überträgt sich auf (6) und (7), also

$$V(t, x_{\cancel{pp}}) = v(t, x).$$

Mit der beliebigen Wahl von (t, x) $\Longrightarrow$ Beh. ∎