INSTITUT FÜR STOCHASTIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Priv.-Doz. Dr. D. Kadelka

WS 2007/08
Blatt 5

Übungen zur Vorlesung
Statistik für Biologen
Musterlösungen

Aufgabe 19:

Von einem Messinstrument treffen in zufälligen zeitlichen Abständen Signale ein. Die zufällige Anzahl X der in $[0,1]$ eintreffenden Signale habe die Poissonverteilung $\pi(\beta)$, $\beta > 0$.

a) Es sei speziell $\beta = 1.6$. Berechnen Sie

- $p_0 :=P($es trifft in $[0,1]$ kein Signal ein$)$,
- $p_1 :=P($es trifft in $[0,1]$ genau ein Signal ein$)$,
- $p_2 :=P($es treffen in $[0,1]$ mindestens zwei Signale ein$)$.

b) Nachstehend finden Sie die Werte $P(X = k)$ für einige Werte β und k.

β \ k	0	1	2	3	
0.6053	0.5459	0.3304	0.1000	0.0202	
1.1020	0.3322	0.3661	0.2017	0.0741	$P(X = k)$
1.3015	0.2721	0.3542	0.2305	0.1000	
5.3224	0.0049	0.0260	0.0691	0.1227	

Für welches β ist die Wahrscheinlichkeit, dass das dritte Signal nach 1 eintrifft, gerade gleich 0.1 ?

Lösung:

a) Nach Voraussetzung gilt

$$X := \#\text{ der in } [0,1] \text{ eintreffenden Signale } \sim Po(1.6)$$

also

$$P(X = k) = e^{-1.6} \cdot \frac{(1.6)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
p_0 &= P(\text{es trifft in } [0,1] \text{ kein Signal ein } = P(X = 0) = e^{-1.6} \approx 0.2019,\\
p_1 &= P(\text{es trifft in } [0,1] \text{ genau ein Signal ein } = P(X = 1) = e^{-1.6} \cdot \frac{1.6}{1} \approx 0.3230,\\
p_2 &= P(\text{es treffen in } [0,1] \text{ mindestens zwei Signale ein } = P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)\\
&= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - e^{-1.6} - e^{-1.6} \cdot \frac{1.6}{1} \approx 0.4751.
\end{aligned}$$

b) Das dritte Signal triff ganau dann nach 1 ein, wenn in $[0, 1]$ höchstens 2 Signale eintreffen. Gesucht ist also ein $\beta > 0$ mit

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.1$$

In der Tabelle schließt man dann sofort die erste bis dritte Zeile aus, da hierfür offenbar jeweils $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) > 0.1$ gilt. Für $\beta = 5.3224$ ist dagegen $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.1$.

Aufgabe 20:

Das Gewicht 25-jähriger Männer (in kg) sei näherungsweise $LN(4.34, 0.0256)$-verteilt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein 25-jähriger Mann schwerer als 70 kg ist?

b) Wie schwer muss ein 25-jähriger Mann mindestens sein, um zu den schwersten 10 % seiner Altersklasse zu gehören?

Lösung: Die Zufallsvariable $X \sim LN(4.34, 0.0256)$ sei das Gewicht eines 25-jährigen Mannes in kg. Nach dem Skriptum, S. 70, hat X wegen $\sqrt{0.0256} = 0.16$ die Verteilungsfunktion

$$t \to F_X(t) = \Phi\left(\frac{\ln(t) - 4.34}{0.16}\right).$$

a) Es gilt daher

$$\begin{aligned} P(X > 70) &= 1 - P(X \leq 70) = 1 - F_X(70) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(70) - 4.34}{0.16}\right) \\ &= 1 - \Phi(-0.5719) = \Phi(0.5719) \approx \Phi(0.58) = 0.719 = 71.9\ \% \end{aligned}$$

b) Gesucht ist ein c mit $P(X > c) = 1 - P(X \leq c) = 0.1$, also mit $F_X(c) = 0.9$. Wir müssen also die Gleichung

$$\Phi\left(\frac{\ln(c) - 4.34}{0.16}\right) = 0.9$$

nach c auflösen. Der Tabelle A.1 entnehmen wir, dass $\Phi(1.28) = 0.8997 \approx 0.9$ und $\Phi(1.30) = 0.9032$ gilt. Wir können daher annehmen, dass

$$\frac{\ln(c) - 4.34}{0.16} \approx 1.28 \iff c \approx e^{1.28 \cdot 0.16 + 4.34} \approx 94.14$$

gilt. Ein 25-jähriger Mann muss mindestens 94.14 kg wiegen, um zu den 10 % schwersten seiner Altersklasse zu gehören.

Aufgabe 21:

Die Lebensdauer (in Jahren) des instabilen Kohlenstoff-Isotops C^{14} ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 0.000121$.

a) Wie groß ist die mittlere Lebensdauer eines C^{14}-Atoms?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein C^{14}-Atom nach t Jahren noch nicht zerfallen?

c) In einer Substanz seien n C^{14}-Atome vorhanden; der Zerfall eines Atoms habe keinen Einfluss auf die anderen Atome. Wie viele Atome sind im Mittel nach t Jahren noch vorhanden?

d) Berechnen Sie die Halbwertszeit von C^{14} (also die Zeit, nach der im Mittel die Hälfte der Atome zerfallen ist).

Lösung: Sei Y die zufällige Lebensdauer (in Jahren) eines C^{14}-Atoms: $Y \sim Exp(\lambda)$ mit $\lambda = 0.000121$.

a) Die mittlere Lebensdauer ist der Erwartungswert $E(Y)$ von Y:

$$E(Y) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0.000121} = 8264.46 \text{ (Jahre)}$$

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein C^{14}-Atom nach t Jahren noch nicht zerfallen ist, ist gegeben durch

$$P(Y > t) = 1 - P(Y \leq t) = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t},$$

wobei

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & \text{falls } t > 0, \\ 0, & \text{falls } t \leq 0 \end{cases}$$

die Verteilungsfunktion der $Exp(\lambda)$-Verteilung bezeichnet.

c) Es liegt ein typisches Treffer-Niete-Experiment mit n Versuchen vor, wobei ein Treffer eintritt, wenn das Atom nach t Jahren noch vorhanden ist, und eine Niete eintritt, wenn das Atom nach t Jahren bereits zerfallen ist.

Damit gilt für die Anzahl X der Treffer:

$$X \sim Bin(n, p)$$

mit $p = P(Y > t) = e^{-\lambda t}$. Im Mittel sind daher nach t Jahren noch

$$EX = n \cdot p = n \cdot e^{-\lambda t}$$

Atome vorhanden.

d) Aus c) folgt: Wenn zu Beginn n C^{14}-Atome da sind, dann sind nach t Jahren im Mittel noch $n \cdot e^{-\lambda t}$ Atome vorhanden. Es ist also ein t zu bestimmen mit

$$n \cdot e^{-\lambda t} = \frac{n}{2}.$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu $e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}$, also $-\lambda t = -\ln(2)$. Daher gilt

$$t = \frac{\ln(2)}{\lambda} = \frac{\ln(2)}{0.000121} = 5728.49 \text{ (Jahre)}.$$

Aufgabe 22:

Die Exzentrizität X von Werkstücken hat (unter gewissen Bedingungen) die Dichte

$$f_\alpha(x) := \begin{cases} 2 \cdot \alpha \cdot x \cdot e^{-\alpha \cdot x^2}, & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x \le 0 \end{cases},$$

wobei $\alpha > 0$ eine Konstante ist. Diese Verteilung heißt **Rayleigh-Verteilung**.

a) Skizzieren Sie für $\alpha = 2$ die Funktion f_2.

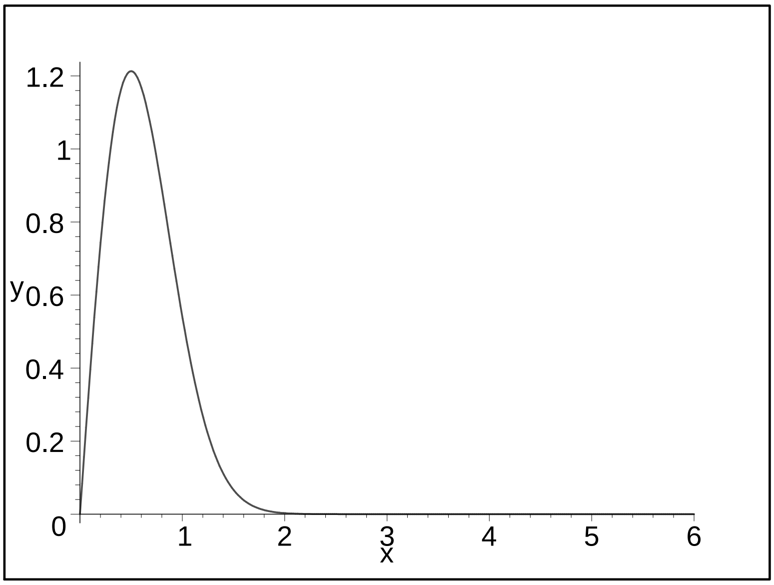
b) Zeigen Sie, dass die Funktion f_α eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

c) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_α zur Dichte f_α.

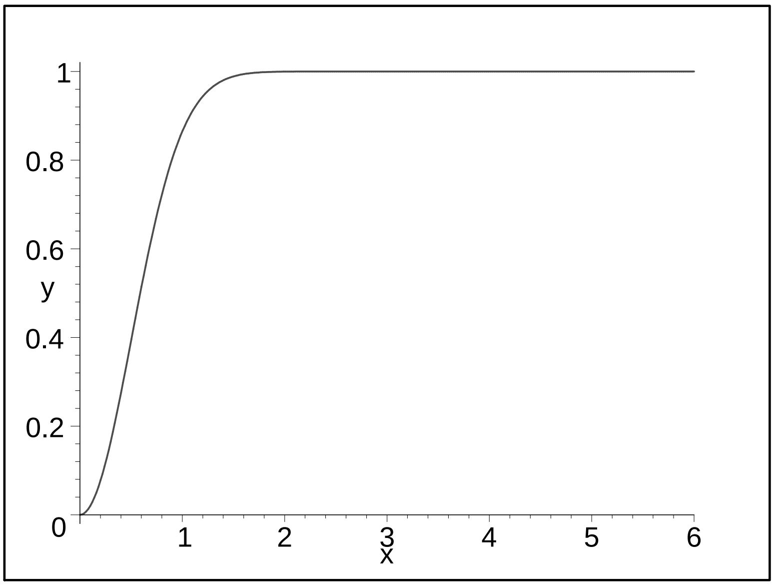
d) Welche Verteilung hat die Zufallsvariable X^2 ?

Lösung:

a) Schaubild der Funktion $f_2(x) = \begin{cases} 4 \cdot x \cdot e^{-4 \cdot x^2}, & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x \le 0 \end{cases}$



und der zugehörigen Verteilungsfunktion $F_2(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_2(t)\, dt$



b) Für $\alpha > 0$ gilt offensichtlich $f_\alpha(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und weiter gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(t)\,dt = \int_0^{\infty} 2 \cdot \alpha \cdot t \cdot e^{-\alpha \cdot t^2} dt = -e^{-\alpha \cdot t^2}\Big]_{t=0}^{\infty} = +1.$$

c) Es gilt

$$F_\alpha(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

1. Fall: $x \leq 0$: in diesem Fall ergibt sich $F_\alpha(x) = 0$.

2. Fall: $x > 0$: in diesem Fall ergibt sich

$$F_\alpha(x) = \int_0^{x} 2 \cdot \alpha \cdot t \cdot e^{-\alpha \cdot t^2} dt = -e^{-\alpha \cdot t^2}\Big]_{t=0}^{x} = 1 - e^{-\alpha \cdot x^2}.$$

d) Für $Y = X^2$ gilt $Y \geq 0$, und damit $F_Y(t) = P(\emptyset) = 0$ für $t < 0$. Für $t \geq 0$ gilt dann wegen $X \geq 0$

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(Y \leq t) = P(X^2 \leq t) = P(-\sqrt{t} \leq X \leq +\sqrt{t}) \\ &= P(0 \leq X \leq +\sqrt{t}) = P(X \leq \sqrt{t}) = 1 - e^{-\alpha \cdot t}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich also die Exponentialverteilung mit dem Parameter $\alpha > 0$.

Aufgabe 23:

Für die Anzahl der Welpen X pro Wurf seien die folgenden Wahrscheinlichkeiten bekannt:

j	3	4	5	6	7
$P(X = j)$	0.2	0.15	0.25	0.1	0.3

Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$, die Varianz $V(X)$ und die Schiefe $\sqrt{\beta_1}$ von X.
Lösung: Wesentlich bei der Lösung dieser Aufgabe ist, dass man bei der Anwendung der Formeln aus dem Skriptum nur über die tatsächlich vorkommenden Werte summiert. So gilt für den Erwartungswert $E(X)$:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{j\geq 0} j \cdot P(X=j) = \sum_{j=3}^{7} j \cdot P(X=j) \\ &= 3 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.15 + 5 \cdot 0.25 + 6 \cdot 0.1 + 7 \cdot 0.3 = 5.15\ , \end{aligned}$$

für die Varianz $V(X)$:

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{j\geq 0} (j-EX)^2 \cdot P(X=j) = \sum_{j=3}^{7} (j-4.7)^2 \cdot P(X=j) \\ &= (-2.15)^2 \cdot 0.2 + (-1.15)^2 \cdot 0.15 + (-0.15)^2 \cdot 0.25 + (0.85)^2 \cdot 0.1 + (1.85)^2 \cdot 0.3 = 2.2275\ , \end{aligned}$$

und für die Schiefe $\sqrt{\beta_1}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{\beta_1} &= \frac{1}{V(X)^{3/2}} \sum_{j\geq 0} (j-EX)^3 \cdot P(X=j) \\ &= \frac{1}{2.2275^{3/2}} \sum_{j=3}^{7} (j-5.15)^3 \cdot P(X=j) \\ &= \frac{(-2.15)^3 \cdot 0.2 + (-1.15)^3 \cdot 0.15 + (-0.15)^3 \cdot 0.25 + (0.85)^3 \cdot 0.1 + (1.85)^3 \cdot 0.3}{2.2275^{3/2}} \\ &\approx -0.07693\ . \end{aligned}$$