Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1

Es bezeichne Φ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung. Beweisen Sie die Ungleichung

$$1-\Phi(x) \leqslant \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}\right\} e^{-x^2/2}$$

für $x \geqslant 0$.

Aufgabe 2

Es sei $z \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$f_z(x) = \begin{cases} \sqrt{2\pi} e^{x^2/2} \Phi(x)(1-\Phi(z)), & x \leqslant z, \\ \sqrt{2\pi} e^{x^2/2} \Phi(z)(1-\Phi(x)), & x > z, \end{cases}$$

eine Lösung der Steinschen Gleichung

$$f'(x) - xf(x) = \mathbf{1}\{x \leqslant z\} - \Phi(z)$$

ist und die Ungleichungen

$$0 < f_z(x) \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad |xf_z(x)| \leqslant 1 \quad \text{und} \quad |f_z'(x)| \leqslant 2$$

für $x \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Aufgabe 3

Für $h \in \mathrm{Lip}(1)$ und eine standard-normalverteilte Zufallsvariable N sei $f_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_h(x) = e^{x^2/2} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} \left(h(y) - \mathbb{E}[h(N)]\right) \mathrm{d}y.$$

Zeigen Sie, dass dann

$$f_h(x) = -\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t(1-t)}} \mathbb{E}[Nh(\sqrt{t}x + \sqrt{1-t}N)] \,\mathrm{d}t$$

und

$$f_h'(x) = -\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{1-t}} \mathbb{E}[Nh'(\sqrt{t}x + \sqrt{1-t}N)] \,\mathrm{d}t.$$