Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1

Gegeben seien Zufallsvariablen $Y_1, \dots, Y_n$ mit $\mathbb{E}[Y_i^2] < \infty$, $i \in \{1, \dots, n\}$, und Mengen $N_1, \dots, N_n$, so dass für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $j \notin N_i$ die Zufallsvariablen Y_i und Y_j unabhängig sind, und es sei $D := \max_{i \in \{1,\dots,n\}} |N_i|$. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\operatorname{Var}\left[\sum_{i=1}^n Y_i\right] \leqslant D \sum_{i=1}^n \operatorname{Var} Y_i.$$

Aufgabe 2

Gegeben seien Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ mit $\mathbb{E}[X_i^4] < \infty$, $i \in \{1, \dots, n\}$, und Mengen $N_1, \dots, N_n$, so dass für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $j \notin N_i$ die Zufallsvariablen X_i und X_j unabhängig sind, und es sei $D := \max_{i \in \{1,\dots,n\}} |N_i|$. Zeigen Sie die Ungleichungen

$$\operatorname{Var}\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} X_i X_j\right] \leqslant 4D^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} \operatorname{Var}[X_i X_j] \leqslant 4D^3 \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^4]$$

und

$$\operatorname{Var}\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i \setminus \{i\}} X_i X_j\right] \leqslant 4D^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i \setminus \{i\}} \operatorname{Var}[X_i X_j].$$

Aufgabe 3

Es bezeichne $T_{n,p}$ die Anzahl der Dreiecke im Erdös-Renyi-Graphen $G(n,p)$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[T_{n,p}] = \binom{n}{3} p^3$$

und

$$\operatorname{Var} T_{n,p} = \binom{n}{3} p^3 \big(1 - p^3 + 3(n-3)p^2(1-p)\big).$$