

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1

Gegeben seien zwei ganzzahlige Zufallsvariablen X und X' , die die gleiche Verteilung haben und $\mathbb{P}(|X - X'| \leq 1) = 1$ erfüllen. Zeigen Sie, dass dann (X, X') ein austauschbares Paar ist.

Aufgabe 2

Beweisen Sie für zwei Zufallsvariablen X und X' und eine σ -Algebra \mathcal{F} mit $\sigma(X) \subset \mathcal{F}$ die Ungleichung

$$\text{Var}[\mathbb{E}[(X - X')^2 | X]] \leq \text{Var}[\mathbb{E}[(X - X')^2 | \mathcal{F}]].$$

Aufgabe 3

Für unabhängige Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n mit $\mathbb{E}[X_i] = 0$, $\text{Var} X_i = 1$ und $\mathbb{E}[X_i^4] < \infty$, $i \in \{1, \dots, n\}$, sei $S = \sum_{i=1}^n X_i / \sqrt{n}$ und es sei $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Zeigen Sie, dass dann

$$d_W(S, N) \leq \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\mathbb{E}[X_i^4] - 1)}}{\sqrt{2\pi n}} + \frac{8}{3n\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i|^3].$$