Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1

Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[X] = 0$ und $0 < \operatorname{Var}[X] = \sigma^2 < \infty$ und

$$p^z(x) = \frac{1}{\sigma^2}\mathbb{E}[X\mathbf{1}\{X > x\}], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie:

a) Es gilt, dass
$$p^z(x) = -\frac{1}{\sigma^2}\mathbb{E}[X\mathbf{1}\{X \leqslant x\}], \quad x \in \mathbb{R}.$$

b) p^z ist eine Dichte.

c) Eine Zufallsvariable X^z mit Dichte p^z ist X-Zero-Bias-verteilt (Hinweis: Jede absolut stetige Funktion ist die Differenz von zwei monoton wachsenden absolut stetigen Funktionen.).

d) Jede X-Zero-Bias-verteilte Zufallsvariable hat die gleiche Verteilung wie X^z.

Aufgabe 2

Zeigen Sie für die Lösung

$$f_z(x) = \begin{cases} \sqrt{2\pi}e^{x^2/2}\Phi(x)(1-\Phi(z)), & x \leqslant z \\ \sqrt{2\pi}e^{x^2/2}\Phi(z)(1-\Phi(x)), & x > z \end{cases}$$

der Steinschen Gleichung

$$f'(x) - xf(x) = \mathbf{1}\{x \leqslant z\} - \Phi(z), \quad x \in \mathbb{R},$$

mit $z \in \mathbb{R}$, dass

$$|f_z''(x)| \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}} + 2|x|, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{z\}.$$

Beweisen Sie, dass es keine Konstante $C > 0$ gibt, so dass

$$|f_z''(x)| \leqslant C, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{z\}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3

Für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ mit $\mathbb{E}[X_i] = 0$, $\operatorname{Var}[X_i] = \sigma_i^2$, $\gamma_i = \mathbb{E}[|X_i|^3] < \infty$, $i \in \{1, \dots, n\}$, und $\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = 1$ sei $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$K(t) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i(\mathbf{1}\{-X_i \leqslant t \leqslant 0\} - \mathbf{1}\{0 < t \leqslant -X_i\})].$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) K ist eine Dichte.

b) Für eine Zufallsvariable T mit der Dichte K ist $\mathbb{E}[|T|] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i$.

c) Für $\delta = \sum_{i=1}^{n}\gamma_i$ gilt

$$\int_{-\delta}^{\delta} K(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2}.$$