Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1

Es seien $Y_1, \dots, Y_n$ nicht-negative unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathrm{Var}[Y_1] > 0$ und $\mathbb{E}[Y_1^3] < \infty$. Zeigen Sie für $S = \sum_{i=1}^n Y_i$ und eine standard-normalverteilte Zufallsvariable N, dass

$$d_W\left(\frac{S - \mathbb{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}, N\right) \leqslant \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\mathbb{E}[Y_1]}{\sqrt{\mathrm{Var}[Y_1]}} + \frac{4\mathbb{E}[Y_1^3]}{\sqrt{\mathrm{Var}[Y_1]}^3}\right) \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Aufgabe 2

Für Konstanten $1 \leqslant \alpha < 2$ und $c > 0$ gelte $\lim_{n\to\infty} n^\alpha p = c$, wobei p ebenfalls von n abhängen darf. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{n\to\infty} (1-p)^{n-1} = \begin{cases} 1, & \alpha > 1, \\ e^{-c}, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Aufgabe 3

Es bezeichne $I_{n,p}$ die Anzahl an isolierten Knoten in $G(n,p)$. Ferner seien $1 \leqslant \alpha < 2$ und $c > 0$ Konstanten, so dass $\lim_{n\to\infty} n^\alpha p = c$. Beweisen Sie, dass dann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}[I_{n,p}]}{n} = \begin{cases} 1, & \alpha > 1, \\ e^{-c}, & \alpha = 1, \end{cases}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Var}[I_{n,p}]}{n^{2-\alpha}} = \begin{cases} c, & \alpha > 1, \\ e^{-c} - e^{-2c} + e^{-2c}c, & \alpha = 1. \end{cases}$$