Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1

Es sei $N_\Sigma \sim \mathcal{N}(0,\Sigma)$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[\langle \text{Hess}\, f(N_\Sigma), \Sigma\rangle_{H.S.} - \langle N_\Sigma, \nabla f(N_\Sigma)\rangle] = 0$$

für alle $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ mit beschränkten ersten und zweiten partiellen Ableitungen gilt.

Aufgabe 2

Beweisen Sie, dass eine Folge von zufälligen Vektoren $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^d$ gegen einen zufälligen Vektor X in $\mathbb{R}^d$ in Verteilung konvergiert, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[h(X_n)] = \mathbb{E}[h(X)]$$

für alle beschränkten $h \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit beschränkten partiellen Ableitungen.

Aufgabe 3

Es seien $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ unabhängig und identisch verteilte zufällige Vektoren mit $\mathbb{E}[X^{(1)}] = 0$, Kovarianzmatrix Σ und $\max_{i\in\{1,\dots,d\}} \mathbb{E}[|X_i^{(1)}|^4] < \infty$, $S = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\ell=1}^n X^{(\ell)}$ und $N_\Sigma \sim \mathcal{N}(0,\Sigma)$. Zeigen Sie, dass dann

$$d_3(S, N_\Sigma) \leqslant \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \sqrt{\text{Var}[X_i^{(1)} X_j^{(1)}]} + \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^d \mathbb{E}[|X_i^{(1)} X_j^{(1)} X_k^{(1)}|] \right) \frac{1}{\sqrt{n}}.$$