Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Stochastik
Prof. Dr. N. Bäuerle

Name:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Studienbegleitende Prüfung Stochastik 2

27. März 2007

Diese Klausur hat bestanden, wer mindestens 20 Punkte erreicht.

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen!

VIEL ERFOLG!

Aufgabe	1 (9)	2 (7)	3 (7)	4 (11)	5 (8)	6 (8)	$\sum$ (50)
Punkte							
Korrektor							

Gesamtpunktzahl	Note

Aufgabe 1 (2+1+2+4 Punkte) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\{\omega\} \in \mathcal{A}$ für alle $\omega \in \Omega$. Ein Punkt $\omega \in \Omega$ heißt *Atom*, wenn $\mu(\{\omega\}) > 0$. Das Maß μ heißt *diffus*, falls es in $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ keine Atome gibt.

(a) Zeigen Sie, dass das eindimensionale Lebesgue-Maß λ diffus ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel für ein nicht-diffuses Maß auf dem messbaren Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ an.

(c) Zeigen Sie, dass für ein diffuses Maß μ auf $(\Omega, \mathcal{A})$ alle abzählbaren Mengen Nullmengen sind.

(d) Zeigen Sie, dass jedes Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ zerlegt werden kann in die Summe $\mu + \nu$ zweier Maße, wobei μ diffus ist und ν von der Form $\nu = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j \delta_{x_j}$, $\varepsilon_j \geq 0$, $x_j \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Wegen $P(\mathbb{R}) = 1$ gibt es für $k \in \mathbb{N}$ höchstens k Punkte $y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \ldots, y_k^{(k)}$ mit $\frac{1}{k-1} > P(\{y_j^{(k)}\}) \geq \frac{1}{k}$ (Warum?). Diese Punkte sind dann die Atome von P (Begründung!).

Lösung:

(a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann:

$$\lambda(\{x\}) = \lim_{n\to\infty} \lambda((x - \frac{1}{n}, x]) = \lim_{n\to\infty} (x - (x - \frac{1}{n})) = 0.$$

(b) Sei $\mu = \delta_0$. Dann gilt $\mu(\{0\}) = 1$.

(c) Sei $A \in \mathcal{A}$ abzählbar, d.h. $A = \cup_{i=1}^{\infty} \{\omega_i\}$ mit $\omega_i \in \Omega$, $i \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\{\omega_i\}) = 0.$$

(d) Gäbe es für $k \in \mathbb{N}$ paarweise verschiedene Punkte $y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)}$ mit $n > k$ und $\frac{1}{k-1} > P(\{y_j^{(k)}\}) \geq \frac{1}{k}$, so folgt

$$P(\cup_{j=1}^{n} \{y_j^{(k)}\}) \geq n \cdot \frac{1}{k} > 1.$$

Dies ist ein Widerspruch. Insgesamt gibt es also höchstens abzählbar viele solcher Punkte $y_j^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, $j = 1, \ldots, k$. Bezeichne diese mit $x_1, x_2, \ldots$. Von diesen ist jeder gemäß Definition ein Atom. Andererseits existiert für jedes Atom $x \in \mathbb{R}$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k-1} > P(\{x\}) \geq \frac{1}{k}$, so dass die $x_1, x_2, \ldots$ gerade alle Atome sind.
Setze nun $\varepsilon_j := P(\{x_j\})$ und definiere ν wie in der Aufgabenstellung. Dass ν ein Maß ist, ist klar. Setze $\mu := P - \nu$. Dann gilt $P = \mu + \nu$ und μ ist ein Maß, denn:

- Sei $B \in \mathcal{B}$ und $J \subseteq \mathbb{N}$ die Indexmenge der Atome von P in B. Dann

$$\begin{aligned}\mu(B) = P(B) - \nu(B) &= \sum_{j\in J} P(\{x_j\}) + P(B \setminus \cup_{j\in J}\{x_j\}) - \sum_{j=1}^{\infty} P(\{x_j\}) \cdot 1_{\{x_j \in B\}} \\ &= P(B \setminus \cup_{j\in J}\{x_j\}) \geq 0.\end{aligned}$$

- $\mu(\emptyset) = P(\emptyset) - \nu(\emptyset) = 0$.
- Seien $B_i \in \mathcal{B}$, $i \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt. Dann gilt wegen $P(B_i) - \nu(B_i) \geq 0$:

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = P(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) - \nu(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) - \sum_{i=1}^{\infty} \nu(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (P(B_i) - \nu(B_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i).$$

Offensichtlich ist μ zudem diffus.

Aufgabe 2 (2+2+3 Punkte) Seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ messbare Räume und μ, ν, μ_1, ν_1 bzw. μ_2, ν_2 Maße hierauf.

(a) Formulieren Sie den Satz von Radon-Nikodym für den messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ und die Maße μ und ν.

(b) Seien μ_1, μ_2 σ–endlich. Wie sind die Produkt–σ–Algebra $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ und das Produkt-Maß $\mu_1 \otimes \mu_2$ definiert?

(c) Gelte $\mu_1 \ll \nu_1$ und $\mu_2 \ll \nu_2$, alle Maße seien σ–endlich. Zeigen Sie, dass dann auch gilt

$$\mu_1 \otimes \mu_2 \ll \nu_1 \otimes \nu_2.$$

Hinweis: Satz von Radon-Nikodym und Satz von Tonelli (Fubini I).

Lösung:

(a) Sei ν σ–endlich. Dann gilt $\mu \ll \nu$ genau dann, wenn μ eine Dichte f bezüglich ν hat, d.h.

$$\mu(A) = \int_A f \, d\nu, \quad A \in \mathcal{A},$$

mit einer messbaren Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$.

(b) Es ist $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \sigma(\{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{A}_2, A_1 \in \mathcal{A}_2\})$. Auf dem Erzeugendsystem von $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ wird dann definiert

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2), \quad A_1 \in \mathcal{A}_2, A_1 \in \mathcal{A}_2,$$

wodurch $\mu_1 \otimes \mu_2$ bereits eindeutig auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ festgelegt ist.

(c) Laut Vorausetzung und dem Satz von Radon-Nikodym gibt es $f_1, f_2 \geq 0$

$$\mu_1(A_1) = \int_{A_1} f_1 \, d\nu_1, \quad A_1 \in \mathcal{A}_1$$
$$\mu_2(A_2) = \int_{A_2} f_2 \, d\nu_1, \quad A_2 \in \mathcal{A}_2$$

Dann folgt mit Fubini für $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ mit $\nu_1 \otimes \nu_2(A) = 0$

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A) = \int \mu_2(A_{\omega_1})\mu_1(d\omega_1) = \int \left(\int_{A_{\omega_1}} f_2 \, d\nu_2 \right) f_1(\omega_1)\nu_1(d\omega_1) = \int_A f_1 f_2 \, d(\nu_1 \otimes \nu_2) = 0.$$

Aufgabe 3 (2+5 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

(a) Seien $f, f_1, f_2, \ldots$ messbare Funktionen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Formulieren Sie den Satz von der majorisierten Konvergenz!

(b) Es sei nun U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $f : U \times \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\omega \mapsto f(t, \omega)$ ist $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-messbar und μ–integrierbar für jedes $t \in U$.

(ii) $t \mapsto f(t, \omega)$ ist auf U stetig für jedes $\omega \in \Omega$.

(iii) Es existiert eine μ–integrierbare Funktion $h : \Omega \to \mathbb{R}_+$ mit $|f(t, \omega)| \leq h(\omega)$ für jedes $\omega \in \Omega$ und jedes $t \in U$.

Zeigen Sie, dass $v : U \to \mathbb{R}$, $v(t) := \int f(t, \cdot)\, d\mu$, $t \in U$, stetig ist.

Lösung:

(a) Es gelte $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ und es existiere eine μ–integrierbare Funktion $g : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $|f_n| \leq g$, $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu = \int f\, d\mu.$$

(b) Wegen (i) ist v wohldefiniert.

Sei nun $t \in U$ fest und $(t_n)_{n\geq 1} \subseteq U$ eine Folge mit $t_n \to t$. Für jedes feste $\omega \in \Omega$ setzen wir

$$f_n(\omega) \quad := \quad f(t_n, \omega).$$

und es gelten für jedes $\omega \in \Omega$

($*$) $\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(t, \omega)$ wegen (ii),

($**$) $|f_n(\omega)| \leq h(\omega)$ wegen (iii).

Damit folgt mit der Linearität des Maßintegrals und nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} v(t_n) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \int f(t_n, \cdot)\, d\mu \quad = \quad \int \lim_{n\to\infty} f_n\, d\mu \quad \overset{(*)}{=} \quad \int f(t, \cdot)\, d\mu = v(t)\ ,$$

d.h. v ist stetig im Punkt t, da die Folge $(t_n)_{n\geq 1} \subseteq U$ beliebig gewählt war.

Aufgabe 4 (2+4+2+3 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\Omega', \mathcal{A}')$ ein messbarer Raum. Die Abbildungen $X_n : \Omega \to \Omega'$, $n \in I \neq \emptyset$ seien Zufallsgrößen.

(a) Definieren Sie stochastische Unabhägigkeit der Familie $(X_n)_{n \in I}$.

(b) Es gelte nun $I = \mathbb{N}$ und $(\Omega', \mathcal{A}') = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Zudem seien die $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stochastisch unabhängig und identisch verteilt. Definiere für $\alpha \in (0, 1)$

$$Z_n := \sum_{k=1}^{n} \alpha^k X_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass dann aus $Z_n \xrightarrow{\text{d}} Z$ für eine Zufallsvariable Z folgt, dass die charakteristische Funktion φ_Z von Z die Beziehung

$$(*) \quad \varphi_Z(t) = \varphi_\alpha(t)\varphi_Z(\alpha t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

erfüllt. Dabei ist φ_α die charakteristische Funktion von αX_1.

Bemerkung: Auch die Umkehrung der obigen Aussage gilt, d.h. aus der Darstellung $(*)$ für eine Zufallsvariable Z und eine charakteristische Funktion φ_α folgt $Z_n \xrightarrow{\text{d}} Z$, wenn Z_n wie oben definiert wird und die Verteilung von αX_n gemäß φ_α gewählt wird. Dies brauchen Sie nicht zu beweisen.

(c) Sei U eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $U \sim \mathcal{U}(-1, 1)$. Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion φ_U von U gegeben ist durch

$$\varphi_U(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & , \quad t \neq 0, \\ 1 & , \quad t = 0. \end{cases}$$

(d) Angenommen, in der Situation von Teil (b) ist $\alpha = \frac{1}{2}$ und

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{2} = P(X_n = -1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass dann $Z_n \xrightarrow{\text{d}} Z$ gilt mit $Z \sim \mathcal{U}(-1, 1)$.

Hinweis: Bekanntlich gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = 2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

Lösung:

(a) Die Familie $(X_i)_{i \in I}$ heißt stochastisch unabhängig, wenn für alle $J \subset I$, J endlich und für alle $A_j \in \mathcal{A}_j$, $j \in J$ gilt

$$P\Big(\bigcap_{j \in J} \{X_j \in A_j\}\Big) = \prod_{j \in J} P(\{X_j \in A_j\}).$$

(b) Es gelte $Z_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z$, nach dem Stetigkeitssatz für charakteristische Funktionen also $\lim_{n\to\infty} \varphi_{Z_n}(t) = \varphi_Z(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Außerdem gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$Z_{n+1} = \alpha X_1 + \sum_{k=2}^{n+1} \alpha^k X_k = \alpha X_1 + \alpha \sum_{k=1}^{n} \alpha^k X_{k+1}.$$

Mit $Z'_n := \sum_{k=1}^n \alpha^k X_{k+1} \stackrel{\mathrm{d}}{=} Z_n$ ist Z'_n unabhängig von X_1. Es folgt für $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{Z_{n+1}}(t) = \varphi_{\alpha X_1 + \alpha Z'_n}(t) = \varphi_{\alpha X_1}(t)\varphi_{\alpha Z'_n}(t) = \varphi_{\alpha X_1}(t)\varphi_{Z_n}(\alpha t).$$

Grenzwertbildung auf beiden Seiten liefert die Behauptung.

(c) Es gilt für $t \neq 0$

$$\varphi_U(t) = E\exp(itU) = \int_{-1}^{-1} \exp(itu)\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\frac{1}{it}(\exp(it) - \exp(-it)) = \frac{\sin t}{t}.$$

Zudem gilt natürlich immer $\varphi_U(0) = 1$.

(d) Es gilt zunächst für $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{X_1}(t) = E\exp(itX_1) = \frac{1}{2}(\exp(it) + \exp(-it)) = \cos t,$$

und daher $\varphi_\alpha(t) = \varphi_{X_1}(\alpha t) = \cos\left(\frac{1}{2}t\right)$ wegen $\alpha = \frac{1}{2}$. Mit Teil (a) folgt, dass für $Z \sim \mathcal{U}(-1,1)$ die charakteristische Funktion φ_Z die Gleichung $(*)$ löst, denn für $t \neq 0$ gilt:

$$\varphi_Z(\alpha t)\varphi_\alpha(t) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}{\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{1}{2}t\right) = \frac{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\cos\left(\frac{1}{2}t\right)}{t} = \frac{\sin t}{t} = \varphi_Z(t).$$

Nach der Bemerkung aus Teil (c) folgt also $Z_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z$.

Aufgabe 5 (2+1+5 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen. Unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen gilt dann der zentrale Grenzwertsatz und wie lautet dieser?

(b) Sei X ein d–dimensionaler Zufallsvektor mit $X \sim \mathcal{N}_d(\mu, \Sigma)$, wobei $\mu \in \mathbb{R}^d$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Außerdem seien $b \in \mathbb{R}^s$ und $A \in \mathbb{R}^{s\times d}$, $s \in \mathbb{N}$. Wie lautet die Verteilung von $AX + b$? Hierfür ist keine Begründung erforderlich!

(c) Es sei (X, Y) ein zweidimensionaler Zufallsvektor mit Dichte

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right\}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

für ein $\rho \in (-1, 1)$. Bestimmen Sie mittels des Transformationsatzes für Wahrscheinlichkeitsdichten die gemeinsame Dichte $f_{W,Z}$ von W und Z, wobei

$$W := X, \quad Z := (Y - \rho X)/\sqrt{1-\rho^2}.$$

Folgern Sie daraus, dass W und Z unabhängige $\mathcal{N}(0, 1)$-verteilte Zufallsvariablen sind.

Lösung:

(a) Gilt $E|X_1| < \infty$, $\mu := EX_1$, und $0 < Var(X_1) = \sigma^2 < \infty$, so folgt

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{\text{d}} Y, \quad Y \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

(b) Es gilt $AX + b \sim \mathcal{N}_s(A\mu + b, A\Sigma A')$.

(c) Betrachte die Abbildung

$$(w, z) = \psi(x, y) := \left(x, \frac{y - \rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

ψ ist stetig differenzierbar und bijektiv mit Umkehrabbildung

$$\psi^{-1}(w, z) = \left(w, \rho w + z\sqrt{1-\rho^2}\right)$$

und mit

$$\det\left(\left(\psi^{-1}\right)'(w, z)\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{vmatrix} = \sqrt{1-\rho^2}.$$

Damit folgt für die gemeinsame Dichte von W und Z nach dem Transformationssatz

$$f_{W,Z}(w, z) = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(1-\rho^2)(w^2 + z^2)\right\} = \frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{1}{2}(w^2 + z^2)).$$

Hieraus folgt sofort, dass W und Z unabhängige $\mathcal{N}(0, 1)$-verteilte Zufallsvariablen sind.

Aufgabe 6 (2+2+4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration.

(a) Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein stochastischer Prozess. Definieren Sie, wann X ein $\mathcal{F}$–Martingal, ein $\mathcal{F}$–Supermartingal bzw. ein $\mathcal{F}$–Submartingal ist.

(b) Sei X ein $\mathcal{F}$–Submartingal und es sei $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $\mathcal{G}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n)$ die natürliche Filtration. Zeigen Sie, dass X auch ein $\mathcal{G}$–Submartingal ist.

(c) Seien $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt mit $P(Y_n = 1) = p = 1 - P(Y_n = -1)$, $n \in \mathbb{N}$, wobei $p \in (0, 1)$. Definiere außerdem

$$X_0 := 0, \quad X_{n+1} := X_n + Y_{n+1}$$

und $\mathcal{F}$ durch $\mathcal{F}_n := \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass der Prozess $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$S_n := \left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_n}$$

ein $\mathcal{F}$–Martingal ist.

Lösung:

(a) X ist ein (Super–, Sub–)Martingal, falls

  (i) X $\mathcal{F}$–adaptiert ist,

  (ii) $E|X_n| < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und

  (iii) $E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ $(\leq, \geq) = X_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Wegen $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}_n$ folgt für $n \in \mathbb{N}$

$$E[X_{n+1}|\mathcal{G}_n] = E[E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]|\mathcal{G}_n] \geq E[X_n|\mathcal{G}_n] = X_n,$$

da die bedingte Erwartung Ungleichungen erhält und X_n $\mathcal{G}_n$–messbar ist.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Da X_n $\mathcal{F}_n$–messbar ist, gilt dies auch für S_n. Wegen $|X_n| \leq n$ gilt auch $E|S_n| < \infty$. Mit den Rechenregeln für bedingte Erwartungen folgt wegen der $\mathcal{F}_n$–Messbarkeit von S_n und der Unabhängigkeit von Y_{n+1} von $\mathcal{F}_n$

$$\begin{aligned} E[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= E\left[S_n \left(\frac{1-p}{p}\right)^{Y_{n+1}} \Big| \mathcal{F}_n\right] = S_n \cdot E\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{Y_{n+1}}\right] \\ &= S_n \cdot \left(p\frac{1-p}{p} + (1-p)\left(\frac{1-p}{p}\right)^{-1}\right) = S_n. \end{aligned}$$