Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Stochastik
Prof. Dr. N. Bäuerle

Name:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Scheinklausur Stochastik 2

26. Februar 2007

Hinweis: Dies ist eine Auswahlklausur! Bitte suchen Sie sich vier der fünf Aufgaben zur Bearbeitung aus und markieren Sie diese unten durch ein Kreuz in der entsprechenden Zeile.

Diese Klausur hat bestanden, wer mindestens 16 Punkte erreicht.

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen!

VIEL ERFOLG!

Aufgabe	1 (10)	2 (10)	3 (10)	4 (10)	5 (10)	$\sum$ (40)
Auswahl						
Punkte						
Korrektor						

Gesamtpunktzahl	Note

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)

(a) Sei der messbare Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ gegeben und die darauf definierte Funktion μ:

$$\mu(B) = \big|B \cap \{1, 2, \ldots, 10\}\big|, \quad B \in \mathcal{B},$$

wobei $|A|$ die Anzahl der Elemente in A sei. Zeigen Sie, dass μ ein Maß ist.

(b) Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ messbare μ-integrierbare Funktionen. Zeigen Sie die Aussage:

$$g = f \ \mu\text{-f.ü.} \quad \Longleftrightarrow \quad \textstyle\int f\, \mathbf{1}_A \, d\mu = \int g\, \mathbf{1}_A \, d\mu \ \text{ für alle } A \in \mathcal{A}.$$

Lösung:

(a) i) $\forall\, B \in \mathcal{B} : \ \mu(A) = \big|A \cap \{1, 2, \ldots, 10\}\big| \geq 0$ (da die Anzahl einer Menge immer ≥ 0).

ii) $\mu(\emptyset) = \big|\emptyset \cap \{1, 2, \ldots, 10\}\big| = \big|\emptyset\big| = 0$

iii) Seien $B_i \in \mathcal{B}$ paarweise disjunkt, dann gilt:

$$\begin{aligned}\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) &= \Big|\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \cap \{1, 2, \ldots, 10\}\Big| = \delta_1\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) + \delta_2\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) + \ldots + \delta_{10}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \delta_1(B_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_2(B_i) + \ldots + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{10}(B_i) = \sum_{j=1}^{10} \sum_{i=1}^{\infty} \delta_j(B_i), \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{10} \delta_j(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \big|B_i \cap \{1, 2, \ldots, 10\}\big| = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i).\end{aligned}$$

(b) „$\Rightarrow$“: Seien $g = f$ μ-f.ü. und $A \in \mathcal{A}$ beliebig, so gilt auch $g\, \mathbf{1}_A = f\, \mathbf{1}_A$ μ-f.ü., und damit ist

$$\int f\, \mathbf{1}_A \, d\mu = \int g\, \mathbf{1}_A \, d\mu \qquad (*) \ .$$

„$\Leftarrow$“: Gelte $(*)$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Dann gilt insbesondere

$$\int (f - g)\, \mathbf{1}_{\{f > g\}} \, d\mu = 0 \ .$$

Da $(f - g)$ positiv ist auf $\{f > g\}$, folgt sofort

$$\mathbf{1}_{\{f > g\}} = 0 \quad \mu - \text{f.ü.}$$

und somit

$$\mu(\{f > g\}) = \int \mathbf{1}_{\{f > g\}} \, d\mu = 0 \ .$$

Analog ist $\mu(\{g > f\}) = 0$, also $\mu(\{g \neq f\}) = 0$.

Aufgabe 2 (6+4 Punkte)

(a) Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ $(i \in I \neq \emptyset)$ messbare Räume und $T : \Omega \to \times_{i\in I}\Omega_i$ eine Abbildung mit Komponenten $T_i := \pi_i \circ T$, wobei π_i die Projektion auf die i–te Komponente sei.
Zeigen Sie: T ist genau dann $(\mathcal{A}, \bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i)$-messbar, wenn für alle $i \in I$ die Funktion T_i $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_i)$-messbar ist.

(b) Es seien X, X_n, $n \in \mathbb{N}$, Zufallsvariablen mit endlichem zweiten Moment auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$; es gelte $EX_n \to EX$ und $Var(X_n) \to Var(X)$ mit $n \to \infty$. Zeigen Sie:

Sind alle Zufallsvariablen normalverteilt, so folgt hieraus $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$.

Hinweis: Ist $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, so gilt für die charakteristische Funktion von Y

$$\phi_Y(t) = \exp(it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lösung:

(a) "$\Rightarrow$": Wir haben folgende Abbildungsfolge:

$$(\Omega, \mathcal{A}) \xrightarrow{T} (\bigtimes_{i\in I} \Omega_i, \bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i) \xrightarrow{\pi_i} (\Omega_i, \mathcal{A}_i).$$

Nun ist aber T messbar lt. Voraussetzung und π_i aufgrund der Definition von $\bigotimes\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$, also ist auch $T_i := \pi_i \circ T$ als Verknüpfung messbarer Abbildungen wieder messbar.

"$\Leftarrow$": Für jedes $i \in I$ sei die Abbildung T_i $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_i)$-messbar. Zu zeigen: T ist $(\mathcal{A}, \bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i)$-messbar. Dabei gilt lt. Definition:

$$\bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i = \sigma\big(\{\pi_i^{-1}(A_i) \ : \ i \in I, A_i \in \mathcal{A}_i\}\big).$$

Es reicht also zu zeigen, dass $T^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ für alle $E \in \{\pi_i^{-1}(A_i) \ : \ i \in I, A_i \in \mathcal{A}_i\}$. Für jedes $i \in I$, $A_i \in \mathcal{A}_i$ gilt aber

$$T^{-1}\big(\pi_i^{-1}(A_i)\big) = \big(\pi_i \circ T\big)^{-1}(A_i) = T_i^{-1}(A_i) \in \mathcal{A}$$

nach Voraussetzung.

(b) 1.Beweis: Unter der Normalverteilungsvoraussetzung hängen die charakteristischen Funktionen von X_n und X nur von den ersten beiden Momenten ab und es gilt $\phi_{X_n} \to \phi_X$ punktweise (siehe Hinweis), also nach dem Stetigkeitssatz für charakteristische Funktionen $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$.

2. Beweis: Unter der Normalverteilungsvorraussetzung hängen die Dichten von X_n und X nur von den ersten beiden Momenten ab und es gilt $f_{X_n} \to f_X$ punktweise, also nach dem Satz von Scheffé $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$.

Aufgabe 3 (7+2+1 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X, Y Zufallsvariablen hierauf. X und Y seien unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten zu

$$V := X + Y \quad \text{und } W := \frac{X}{X+Y}.$$

(b) Welche Verteilungen haben V und W?

(c) Zeigen Sie, dass V und W unabhängig sind.

Lösung:

Es seien X und Y unabhängig und jeweils exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, es gilt also $f_{X,Y}(x,y) = \lambda^2 \cdot \exp\big(-\lambda(x+y)\big)$. Benutze den Transformationssatz für Wahrscheinlichkeitsdichten, um zunächst die gemeinsame Dichte von V und W zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{U} := (0,\infty)^2, \quad \mathcal{V} := (0,\infty) \times (0,1) \quad \text{(offen)}\\
&\Psi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}, \quad \Psi(x,y) := \Big(x+y, \frac{x}{x+y}\Big) =: (v,w).
\end{aligned}$$

Dann ist Ψ bijektiv und es ist

$$\Psi^{-1}(v,w) = \big(v \cdot w, v \cdot (1-w)\big).$$

Weiter ergibt sich

$$\big(\Psi^{-1}\big)'(v,w) = \begin{pmatrix} w & v \\ 1-w & -v \end{pmatrix}$$

und

$$\Big|\det\Big(\big(\Psi^{-1}\big)'(v,w)\Big)\Big| = v.$$

Nach dem Transformationssatz gilt dann für die gemeinsame Dichte von V und W:

$$\begin{aligned}
f_{V,W}(v,w) &= \Big|\det\Big(\big(\Psi^{-1}\big)'(v,w)\Big)\Big| \cdot f_{X,Y}\big(\Psi^{-1}(v,w)\big)\\
&= v \cdot \lambda^2 \cdot e^{-\lambda v}.
\end{aligned}$$

Durch Ausintegrieren über die einzelnen Komponenten erhält man dann die Dichten von V und W:

$$f_V(v) = \int_0^1 f_{V,W}(v,w)dw = \int_0^1 v \cdot \lambda^2 \cdot e^{-\lambda v} dw = v \cdot \lambda^2 \cdot e^{-\lambda v},$$

$$f_W(w) = \int_0^\infty f_{V,W}(v,w)dv = \int_0^\infty v \cdot \lambda^2 \cdot e^{-\lambda v} dv = 1,$$

jeweils für $v \in (0, \infty)$ bzw. $w \in (0, 1)$. Daraus folgt, dass V Gamma-verteilt mit Parametern 2 und λ und W gleichverteilt auf $(0, 1)$ ist, und wegen $f_{V,W}(v, w) = f_V(v) \cdot f_W(w)$ sind V und W unabhängig.

Aufgabe 4 (5+5 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Es seien $X, X_1, X_2, ...$ Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel–messbar mit der Eigenschaft $P(X \in \{x : h \text{ nicht stetig in } x\}) = 0$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$X_n \xrightarrow{\text{d}} X \Rightarrow h(X_n) \xrightarrow{\text{d}} h(X)$$

(b) Sei X eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $EX^2 < \infty$ und $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ Sub–σ–Algebren von $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$. Zeigen Sie:

$$E\left[(X - E[X|\mathcal{G}])^2\right] \leq E\left[(X - E[X|\mathcal{H}])^2\right].$$

Lösung:

(a) Mit dem Darstellungssatz von Skorohod: Aus $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$ folgt, dass es einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ und hierauf Zufallsvariablen X'_n, X' mit $X'_n \stackrel{\text{d}}{=} X_n$, $X' \stackrel{\text{d}}{=} X$ und $X'_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X'$ gibt. Es gilt daher auch $h(X'_n) \xrightarrow{\text{f.s.}} h(X')$. Damit dann aber auch $h(X'_n) \xrightarrow{\text{d}} h(X')$. Aufgrund der Verteilungsgleichheit, also identischer Verteilungsfunktionen, folgt dann auch $h(X_n) \xrightarrow{\text{d}} h(X)$.

(b) Es ist

$$\begin{aligned}
E\left[(X - E[X|\mathcal{H}])^2\right] &= E\left[(X - E[X|\mathcal{G}] + E[X|\mathcal{G}] - E[X|\mathcal{H}])^2\right] \\
&= E\left[(X - E[X|\mathcal{G}])^2\right] + \underbrace{E\left[(E[X|\mathcal{G}] - E[X|\mathcal{H}])^2\right]}_{\geq 0} + 2E[(X - E[X|\mathcal{G}]) \cdot \underbrace{(E[X|\mathcal{G}] - E[X|\mathcal{H}])}_{=: Y}] \\
&\geq E\left[(X - E[X|\mathcal{G}])^2\right],
\end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned}
E[(X - E[X|\mathcal{G}]) \cdot Y) &= EXY - E[Y \cdot E|X|\mathcal{G}]] \\
&= EXY - E[E|YX|\mathcal{G}]] \\
&= EXY - EXY = 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (4+6 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Sei X eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $E|X| < \infty$. Sei $\mathcal{F}$ eine Unter–σ–Algebra von $\mathcal{A}$. Zeigen Sie:

Gilt $P(A) \in \{0, 1\}$ für alle $A \in \mathcal{F}$, so folgt

$$E[X|\mathcal{F}] \;=\; EX \qquad P\text{–f.s.}$$

(b) Sei $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ eine Filtration, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Sind $(X_t)_{t\in I}$ und $(Y_t)_{t\in I}$ $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$–Supermartingale, so ist auch $(Z_t)_{t\in I}$ mit $Z_t := X_t \wedge Y_t$ mit $x \wedge y := \min\{x, y\}$ ein $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$–Supermartingal.

(ii) Ist $(X_t)_{t\in I}$ ein $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$–Submartingal, so ist auch $(X_t^+)_{t\in I}$ ein $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$–Submartingal.

Lösung:

(a) EX ist als konstante Funktion auf Ω $\mathcal{F}$–messbar und integrierbar. Zu zeigen ist nach Definition

$$\int_A EX \; dP \;=\; \int_A X \; dP \qquad \forall\, A \in \mathcal{F}\ .$$

Beide Seiten dieser Gleichung sind entweder gleich 0 oder gleich EX je nachdem, ob $P(A) = 0$ oder $P(A) = 1$ gilt.

(b) Sei $t \geq s$.

(i) Aus der Monotonie der bedingten Erwartung folgt

$$E[Z_t|\mathcal{F}_s] = E[X_t \wedge Y_t|\mathcal{F}_s] \overset{\text{Monotonie}}{\leq} E[X_t|\mathcal{F}_s] \overset{\text{Supermart.}}{\leq} X_s.$$

Analog gilt $E[Z_t|\mathcal{F}_s] \leq Y_s$. Insgesamt also

$$E[Z_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s \wedge Y_s = Z_s.$$

Damit ist $(Z_t, \mathcal{F}_t)$ ein Supermartingal.

(ii) Offenbar ist $Y_t :\equiv 0$, $t \in T$, ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)$. Insbesondere ist dann $(Y_t, \mathcal{F}_t)$ ein Supermartingal. Weiter ist $-X_t$ ein Supermartingal. Nach (a) ist auch $((-X_t) \wedge Y_t)$ ein $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$–Supermartingal. Damit ist $X_t^+ = -((-X_t) \wedge Y_t)$ ein $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$–Submartingal.

Eine andere Möglichkeit für einen Beweis der Aussage ist die Ausnutzung der Monotonie und Konvexität der Funktion $\phi(x) = x^+$:

$$\begin{aligned} E[X_t^+|\mathcal{F}_s] \;&\geq\; \phi(E[X_t|\mathcal{F}_s]) \text{ (Jensensche Ungl.)} \\ &\geq\; \phi(X_s) \text{ (Montonie)} \\ &=\; X_s^+. \end{aligned}$$