Institut für Stochastik
Universität Karlsruhe
Dr. B. Klar

WS 2007/2008
12. 03. 2008

Klausur zur Vorlesung Stochastik II

Muster-Lösung

Dauer: 90 Minuten

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Diese Klausur hat bestanden, wer mindestens 18 Punkte erreicht.

Hilfsmittel sind nicht zugelassen!

Aufgabe	1 (7)	2 (9)	3 (9)	4 (8)	5 (9)	6 (8)	$\sum$ (50)
Punkte							
Korrektor							

Gesamtpunktzahl	Note

Aufgabe 1 (7 Punkte)

a) Auf dem Messraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ seien die Mengenfunktionen μ_n für $n \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$\mu_n(A) = \frac{1}{n} \left| A \cap \{1, \ldots, n\} \right|, \qquad A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Zeigen Sie, dass μ_n ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

b) μ und ν seien Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$. Es gelte $\mu \ll \nu$ und $\nu \ll \mu$. Zeigen Sie: Für die Radon-Nikodym-Dichte $\dfrac{d\mu}{d\nu}$ von μ bzgl. ν gilt $\dfrac{d\mu}{d\nu} > 0$ μ-f.s.; weiter gilt $\dfrac{d\nu}{d\mu} = 1 \Big/ \dfrac{d\mu}{d\nu}$ μ-f.s..

Lösung zu Aufgabe 1

a) Offenbar gilt $\mu_n(\emptyset) = 0$ und $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow [0,1]$. Wegen

$$\begin{aligned} \mu_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \frac{1}{n} \left| \left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap \{1, \ldots, n\} \right| \\ &= \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cap \{1, \ldots, n\}) \right| \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\infty} |A_i \cap \{1, \ldots, n\}| \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} \mu_n(A_i) \end{aligned}$$

ist μ_n σ-additiv, also ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

b) Wegen $\mu \ll \nu$ gilt $\mu(A) = \int_A \frac{d\mu}{d\nu}\, d\nu$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Dann gilt

$$0 = \int_{\left\{\frac{d\mu}{d\nu} = 0\right\}} \frac{d\mu}{d\nu}\, d\nu = \mu\left(\left\{\frac{d\mu}{d\nu} = 0\right\}\right),$$

d.h. $\frac{d\mu}{d\nu} > 0$ μ-f.s..

Weiter gilt wegen $\mu \ll \nu$ für jede μ-integrierbare Abbildung h: $\int h\, d\mu = \int h \frac{d\mu}{d\nu}\, d\nu$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad \nu(A) \overset{\nu \ll \mu}{=} \int_A \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu = \int_A \frac{d\nu}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\nu}\, d\nu \qquad \forall\, A \in \mathcal{A} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{d\nu}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\nu} = 1 \qquad \nu\text{-f.s. } (\mu\text{-f.s.}) \\ &\Longrightarrow \quad \frac{d\nu}{d\mu} = 1 \Big/ \frac{d\mu}{d\nu} \qquad \mu\text{-f.s.} \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (9 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P) = \left([0,1], \mathcal{B}^1|_{[0,1]}, \lambda^1|_{[0,1]}\right)$ und

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \le \omega < 1/4; \\ 4\omega^2, & 1/4 \le \omega < 3/4; \\ \omega^2, & 3/4 \le \omega \le 1. \end{cases}$$

a) Begründen Sie, warum X eine Zufallsvariable ist.

b) Bestimmen Sie $P(X \in [0,1])$ und $P\left(X \in \left[\frac{3}{4}, 1\right)\right)$.

c) Bestimmen Sie Erwartungswert und Verteilungsfunktion von $Y = \sqrt{X}$.

Hinweis: Skizzieren Sie Y.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $\{X \ge a\}$ eine endliche Vereinigung von Intervallen, und somit in $\mathcal{B}^1|_{[0,1]}$. Somit ist X messbar, also eine Zufallsvariable.

b) $$P(X \in [0,1]) = P(\{\omega \in \Omega : 0 \le X(\omega) \le 1\}) = P\left(\left[0, \frac{1}{4}\right) \cup \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, 1\right]\right) = \frac{3}{4},$$

$$P\left(X \in \left[\frac{3}{4}, 1\right)\right) = P\left(\left[\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)\right) = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

c)

$$Y(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \le \omega < 1/4; \\ 2\omega, & 1/4 \le \omega < 3/4; \\ \omega, & 3/4 \le \omega \le 1. \end{cases}$$

$$\implies \quad EY = \int_\Omega Y \, dP = \int_0^{1/4} 1 \, d\omega + \int_{1/4}^{3/4} 2\omega \, d\omega + \int_{3/4}^1 \omega \, d\omega = \frac{31}{32}.$$

$$\{Y \le y\} = \begin{cases} \emptyset, & y < \frac{1}{2} \\ \left[\frac{1}{4}, \frac{y}{2}\right], & \frac{1}{2} \le y < \frac{3}{4} \\ \left[\frac{1}{4}, \frac{y}{2}\right] + \left[\frac{3}{4}, y\right], & \frac{3}{4} \le y < 1 \\ \left[0, \frac{1}{4}\right) + \left[\frac{1}{4}, \frac{y}{2}\right] + \left[\frac{3}{4}, 1\right], & 1 \le y < \frac{3}{2} \\ [0,1], & y \ge \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\implies \qquad F_Y(t) = \begin{cases} 0, & y < \frac{1}{2} \\ \frac{y}{2} - \frac{1}{4}, & \frac{1}{2} \le y < \frac{3}{4} \\ \frac{3y}{2} - 1, & \frac{3}{4} \le y < 1 \\ \frac{y}{2} + \frac{1}{4}, & 1 \le y < \frac{3}{2} \\ 1, & y \ge \frac{3}{2} \end{cases}$$

Aufgabe 3 (9 Punkte)
Es seien$X, X_1, X_2, \dots$ reelle Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie:

a) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} X \quad \Longrightarrow \quad EX_n \longrightarrow EX \quad (n \to \infty).$

b) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} X.$

c) $(EX^2)^{1/2} \le (E(X_n - X)^2)^{1/2} + (EX_n^2)^{1/2}, \quad (EX_n^2)^{1/2} \le (E(X_n - X)^2)^{1/2} + (EX^2)^{1/2}.$

d) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} X \quad \Longrightarrow \quad EX_n^2 \longrightarrow EX^2 \quad (n \to \infty).$

e) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} X \quad \Longrightarrow \quad V(X_n) \longrightarrow V(X) \quad (n \to \infty).$

Lösung zu Aufgabe 3

a) Es gilt $|EX_n - EX| = |E(X_n - X)| \le E|X_n - X| \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$ nach Voraussetzung.

b) Nach Voraussetzung und Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} E|X_n - X|^1 &= \int |X_n - X| \, dP = \int |X_n - X| \cdot 1 \, dP \\ &\le \left(\int (X_n - X)^2 \, dP \right)^{1/2} \cdot \left(\int 1^2 \, dP \right)^{1/2} \\ &= \left(E(X_n - X)^2 \right)^{1/2} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

<u>Alternative Lösung:</u> Da die Funktion $g(x) = \sqrt{x}$ konkav ist, gilt nach Jensensche Ungleichung

$$E|X_n - X|^1 = E\left[\sqrt{(X_n - X)^2}\right] \le \sqrt{E\left[(X_n - X)^2\right]} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

c) Die Minkowski- (Dreiecks-)Ungleichung liefert

$$\begin{aligned} (EX^2)^{1/2} &= \|X\|_2 = \|(X - X_n) + X_n\|_2 \\ &\le \|X_n - X\|_2 + \|X_n\|_2 \\ &= (E(X_n - X)^2)^{1/2} + (EX_n^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Die 2. Ungleichung gilt analog.

d) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} X \quad \stackrel{\text{c)}}{\Longrightarrow} \quad (EX^2)^{1/2} \le \liminf_{n\to\infty} (EX_n^2)^{1/2}, \quad \limsup_{n\to\infty} (EX_n^2)^{1/2} \le (EX^2)^{1/2}$

$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} EX_n^2 = EX^2.$

e) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} X \quad \stackrel{\text{b)}}{\Longrightarrow} \quad X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} X \quad \stackrel{\text{a)}}{\Longrightarrow} \quad EX_n \longrightarrow EX \quad (n \to \infty),$

$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} X \quad \stackrel{\text{d)}}{\Longrightarrow} \quad EX_n^2 \longrightarrow EX^2 \quad (n \to \infty).$

Zusammen gilt $V(X_n) = EX_n^2 - (EX_n)^2 \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} EX^2 - (EX)^2 = V(X).$

Aufgabe 4 (8 Punkte)

a) X und Z seien unabhängige Zufallsvariablen, wobei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ und $P(Z=1) = P(Z=-1) = \frac{1}{2}$.

(i) Zeigen Sie: $Y = Z \cdot X$ ist standardnormalverteilt.

(ii) Bestimmen Sie die Kovarianz zwischen X und Y.

(iii) Begründen Sie, warum X und Y nicht unabhängig sind.

b) Es seien $X_n \sim \mathcal{N}(\mu_n, 1)$, $Y_n \sim \mathcal{N}(\nu_n, 1)$ mit $C(X_n, Y_n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Weiter gelte $\mu_n \longrightarrow 0$, $\nu_n \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) X_n konvergiert in Verteilung gegen eine Normalverteilung.

(ii) (X_n, Y_n) konvergiert in Verteilung gegen eine bivariate Normalverteilung.

Lösung zu Aufgabe 4

a) (i)

$$
\begin{aligned}
P(Y \le y) &= P(Z \cdot X \le y) \\
&= P(Z \cdot X \le y, Z = 1) + P(Z \cdot X \le y, Z = -1) \\
&= P(X \le y, Z = 1) + P(X \ge -y, Z = -1) \\
&\underset{\text{unabh.}}{\overset{X,Z}{=}} P(X \le y) \cdot \frac{1}{2} + P(X \ge -y) \cdot \frac{1}{2} \\
&= \Phi(y) \cdot \frac{1}{2} + (1 - \Phi(-y)) \cdot \frac{1}{2} = \Phi(y), \qquad (y \in \mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

(ii) Wegen $EZ = 0$ gilt

$$
\begin{aligned}
C(X,Y) &= C(X, Z \cdot X) = E(XZX) - EX \cdot E(ZX) \\
&= E(X^2) \cdot EZ - (EX)^2 \cdot EZ = 0.
\end{aligned}
$$

(iii) Nein, da $|X| = |Y|$ ist. Z.B. ist

$$
P(|X| > 1, |Y| < 1) = 0 \ne P(|X| > 1) \cdot P(|Y| < 1).
$$

b) (i) Sei F_n die Verteilungsfunktion von X_n. Wegen $X_n \sim \mathcal{N}(\mu_n, 1)$ gilt

$$
F_n(t) = \Phi(t - \mu_n) \longrightarrow \Phi(t) \ \ (n \to \infty), \text{ da } \mu_n \longrightarrow 0.
$$

$\Longrightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$.

<u>Alternative Lösung:</u>

$$
\varphi_{X_n}(t) = e^{it\mu_n} \cdot e^{-t^2/2} \longrightarrow e^{-t^2/2} =: \varphi(t) \quad \text{für } n \to \infty.
$$

Da $\varphi(t)$ die charakteristische Funktion der Standardnormalverteilung ist, folgt $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$.

(ii) Setzt man $X_n := X$, $Y_n := Y$ mit X, Y aus a), so sind die Voraussetzungen in b) erfüllt (mit $\mu_n = \nu_n = 0$ für alle n), und $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X, Y)$, aber (X, Y) ist nicht bivariat normalverteilt (da unabhängig, aber unkorreliert). Die zweite Behauptung in b) ist also falsch.

Aufgabe 5 (9 Punkte)
Es seien X_k, $k \in \mathbb{N}$, unabhängige Zufallsvariablen mit $P(X_k = k) = P(X_k = -k) = \frac{1}{2}$. Sei $\sigma_n := \left(\sum\limits_{k=1}^{n} V(X_k)\right)^{\frac{1}{2}}$.

a) Zeigen Sie: $\displaystyle \frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$ und $\displaystyle \left(\frac{3}{n^3}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$ $(n \to \infty)$.

Hinweis: $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

b) Geben Sie die charakteristischen Funktionen von X_k und von $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ an.

c) Zeigen Sie mit Hilfe von a) und b): $\displaystyle \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\sqrt{3}k}{n^{3/2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}}$.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Es gelten $EX_k = 0$, $V(X_k) = k^2$ für $k \in \mathbb{N}$ und somit

$$\sigma_n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$ und $n > 3\varepsilon^{-2}$. Dann folgt $k \leq n \leq \varepsilon\left(\frac{n^3}{3}\right)^{1/2} \leq \varepsilon\sigma_n$ für $k \leq n$ und hieraus

$$\sum_{k=1}^{n} E|X_k|^2\, \mathbf{1}_{\{|X_k|>\varepsilon\sigma_n\}} = \sum_{k=1}^{n} E|X_k|^2\, \mathbf{1}_{\{k>\varepsilon\sigma_n\}} = 0.$$

Damit ist insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{n} E|X_k - EX_k|^2\, \mathbf{1}_{\{|X_k-EX_k|>\varepsilon\sigma_n\}} = 0.$$

Die Lindeberg-Bedingung ist somit erfüllt und die erste Behauptung folgt aus dem zentralen Grenzwertsatz. Wegen $3\sigma_n^3/n^3 \longrightarrow 1$ $(n \to \infty)$ folgt auch die 2. Behauptung.

b) $\varphi_{X_k}(t) = E\left(e^{itX_k}\right) = \dfrac{1}{2}\left(e^{itk} + e^{-itk}\right) = \cos(tk), \quad k \in \mathbb{N}.$

Da $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig sind, gilt $\displaystyle \varphi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} \cos(tk)$.

c) Nach a) gilt $\frac{\sqrt{3}}{n^{3/2}} \cdot S_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$. Die charakteristische Funktion φ_n von $\sqrt{3}S_n/n^{3/2}$ ist

$$\varphi_n(t) = \varphi_{S_n}\left(\frac{\sqrt{3}}{n^{3/2}}t\right) \overset{\text{b)}}{=} \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\sqrt{3}kt}{n^{3/2}}\right);$$

die charakteristische Funktion von $\mathcal{N}(0,1)$ ist $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$. Aus dem Stetigkeitssatz für charakteristische Funktionen folgt $\varphi_n(t) \xrightarrow{n\to\infty} \varphi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und somit für $t = 1$ die Behauptung.

Aufgabe 6 (8 Punkte)
Ein Stab der Länge 1 werde rein zufällig (Gleichverteilung!) in zwei Stücke zerbrochen. X sei die Länge des größeren Stücks. Das größere Stück wird nochmals rein zufällig in zwei Stücke zerbrochen. Y sei die Länge des größeren Stücks beim zweiten Zerbrechen.

a) Geben Sie die Verteilung und Dichte von X an.

   Hinweis: $X = \max(U, 1-U)$, wobei $U \sim \mathcal{U}(0,1)$.

b) Geben Sie die bedingte Verteilung von Y unter der Bedingung $X = x$ und die zugehörige bedingte Dichte an.

c) Bestimmen Sie $E[Y|X = x]$.

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gilt $Y > \frac{1}{2}$?

Lösung zu Aufgabe 6

a) Es gilt

$$\begin{aligned} P(X \le x) &= P(U \le x, 1-U \le x) = P(1-x \le U \le x) = 2x - 1 \quad \forall\, x \in (1/2, 1), \\ f_X(x) &= 2 \cdot \mathbf{1}_{(\frac{1}{2},1)}(x). \end{aligned}$$

   X ist also gleichverteilt auf $(1/2, x)$.

b) Unter der Bedingung $X = x$ ist $Y = \max(V, X - V)$, wobei $P^V(\,\cdot\,|X = x) = \mathcal{U}(0, x)$

   $\overset{\text{a)}}{\Longrightarrow} \quad P^Y(\,\cdot\,|X = x) = \mathcal{U}(\frac{x}{2}, x)$ mit Dichte $f(y|x) = \frac{2}{x} \cdot \mathbf{1}_{(\frac{x}{2},x)}(y)$.

c)

$$E[Y|X = x] = \int y\ f(y|x)\ dy = \int_{x/2}^{x} y \cdot \frac{2}{x}\ dy = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{8}\right) \cdot \frac{2}{x} = \frac{3}{4}x.$$

d)

$$\begin{aligned} P\left(Y > \frac{1}{2}\right) &= \int P\left(Y > \frac{1}{2}\middle| X = x\right)\ P^X(dx) \\ &= \iint \mathbf{1}_{\{y > \frac{1}{2}\}}\ P^Y(dy|X = x)\ P^X(dx) \\ &= \int \left(\int \mathbf{1}_{\{y>\frac{1}{2}\}} \cdot \frac{2}{x} \cdot \mathbf{1}_{\{\frac{x}{2}<y<x\}}\ dy\right) \cdot 2 \cdot \mathbf{1}_{\{\frac{1}{2}<x<1\}}\ dx \\ &= \int_{1/2}^{1} \frac{4}{x} \left(\int_{1/2}^{x} 1\ dy\right)\ dx = \int_{1/2}^{1} \left(4 - \frac{2}{x}\right)\ dx \\ &= |4x - 2\log x|_{1/2}^{1} = 4 - 2 + 2\log\frac{1}{2} \\ &= 2 - 2\log 2 = 2(1 - \log 2) \\ (\quad &\approx \quad 0{,}614 \quad). \end{aligned}$$