Institut für Mathematische Stochastik
Universität Karlsruhe
Dr. B. Klar

WS 2007/2008
25. 02. 2008

Scheinklausur zur Vorlesung Stochastik II
Muster-Lösung

Dauer: 90 Minuten

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Diese Klausur hat bestanden, wer mindestens 19 Punkte erreicht.

Hilfsmittel sind nicht zugelassen!

Aufgabe	1 (7)	2 (6)	3 (6)	4 (6)	5 (6)	6 (6)	7 (6)	8 (7)	$\sum$ (50)
Punkte									
Korrektor									

Gesamtpunktzahl	Note

Aufgabe 1 (3+4 Punkte)

a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass die Ableitung f' (Borel–) meßbar ist.

b) Zeigen Sie, dass eine monoton fallende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Borel–) meßbar ist.

Lösung zu Aufgabe 1

a) f differenzierbar $\implies$ f stetig $\implies$ f (Borel–) meßbar.
Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x \longmapsto x + \frac{1}{n}$ ist Borel–meßbar.
$\implies$ $x \longmapsto f\left(x + \frac{1}{n}\right)$ ist Borel-meßbar.
Definiere

$$f_n : x \longmapsto f_n(x) := \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{1/n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

f_n ist Borel–meßbar ($n \in \mathbb{N}$), und es gilt $\lim_{n\to\infty} f_n = f'$ punktweise auf $\mathbb{R}$.
$\implies$ f' ist Borel–meßbar.

b) Es seien f monoton fallend und $a \in \mathbb{R}$ beliebig.
Zu zeigen: $\{f \geq a\} \in \mathcal{B}^1$.

(i) Ist $\{f \geq a\} = \emptyset$, so ist $\{f \geq a\} \in \mathcal{B}^1$.

(ii) Ist $\{f \geq a\} \neq \emptyset$, so definiere $M := \sup\{\omega : f(\omega) \geq a\}$.

- Ist $M = \infty$, so folgt $\{f \geq a\} = \mathbb{R} \in \mathcal{B}^1$.
- Ist $M < \infty$, so gilt:
  $M \in \{f \geq a\} \implies \{f \geq a\} = (-\infty, M] \in \mathcal{B}^1$,
  $M \notin \{f \geq a\} \implies \{f \geq a\} = (-\infty, M) \in \mathcal{B}^1$.

Aufgabe 2 (2+4 Punkte)
Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und f, g $\mathcal{A}$–meßbare numerische Funktionen auf Ω. Zeigen Sie:

a) $\|f \cdot g\|_1 \ \leq \ \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$.

b) Falls $\mu(\Omega) < \infty$, so gilt $\|f\|_q \leq \|f\|_p \cdot \mu(\Omega)^{1/q - 1/p} \quad (1 \leq q < \boldsymbol{p < \infty}\ )$.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Mit $|g| \overset{\mu}{\leq} \|g\|_\infty$ folgt

$$\|f \cdot g\|_1 \ = \ \int |f \cdot g| \, d\mu \ = \ \int |f| \cdot |g| \, d\mu \ \leq \ \|g\|_\infty \cdot \int |f| \, d\mu \ = \ \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty \ .$$

b) Sei nun $\mu(\Omega) < \infty$. Ohne Einschränkung sei $\|f\|_p < \infty$, da die Ungleichung sonst trivialerweise erfüllt ist.

Sei $r > 1$ beliebig mit $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$. Mit der Hölderschen Ungleichung gilt

$$\begin{aligned}
\int |f|^q \, d\mu \ &= \ \int |f|^q \cdot 1 \, d\mu \\
&\leq \ \left(\int (|f|^q)^r \, d\mu \right)^{1/r} \left(\int 1^s \, d\mu \right)^{1/s} \\
&= \ \left(\int |f|^{q \cdot r} \, d\mu \right)^{1/r} \mu(\Omega)^{1/s},
\end{aligned}$$

und für $r := \frac{p}{q} > 1$, $\frac{1}{s} = 1 - \frac{q}{p}$ ergibt sich

$$\int |f|^q \, d\mu \ \leq \ \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{q/p} \mu(\Omega)^{1 - q/p}$$

und damit die Behauptung $\|f\|_q \ \leq \ \|f\|_p \cdot \mu(\Omega)^{1/q - 1/p}$.

Aufgabe 3 (2+3+1 Punkte)
Es sei $\mathcal{A} := \{A \subset \Omega : A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ abzählbar } \}$ die σ–Algebra der co–abzählbaren Mengen auf einer überabzählbaren Menge Ω. Die Maße ν und μ seien durch

$$\nu(A) := \begin{cases} 0 & , \quad \text{falls } A \text{ abzählbar} \\ \infty & , \quad \text{falls } A^c \text{ abzählbar} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \mu(A) := \begin{cases} |A| & , \quad \text{falls } A \text{ endlich} \\ \infty & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Zeigen Sie:

a) $\nu \ll \mu$.

b) ν besitzt keine Dichte bezüglich μ.

c) Warum stehen a) und b) nicht im Widerspruch zum Satz von Radon-Nikodym?

Lösung zu Aufgabe 3

a) Wenn $\mu(A) = 0$ für eine Teilmenge A von Ω ist, so gilt nach Definition $|A| = 0$, also zwangsläufig $A = \emptyset$. Daraus folgt auch $\nu(A) = 0$.

b) Wir nehmen an, es existiert eine Funktion $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}^1})$ mit $\nu = f\mu$, d.h.

$$\nu(A) \quad = \quad \int_A f \, d\mu \qquad (A \in \mathcal{A}) \ .$$

Damit gilt für beliebiges $\omega \in \Omega$

$$0 \quad = \quad \nu(\{\omega\}) \quad = \quad \int_{\{\omega\}} f \, d\mu \quad = \quad f(\omega) \cdot \mu(\{\omega\}) \quad = \quad f(\omega) \ ,$$

also $f \equiv 0$. Andererseits ist

$$\nu(\Omega) \quad = \quad \infty \quad \neq \quad \int_\Omega 0 \, d\mu \quad = \quad 0 \ . \qquad \text{Widerspruch!}$$

c) μ ist nicht σ–endlich. Denn wenn μ σ–endlich wäre, müsste eine aufsteigende Folge $A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \ldots$ von Mengen mit $\mu(A_n) < \infty$ und $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ existieren. Nach Definition von μ wären alle diese A_n endlich, und Ω wäre als abzählbare Vereinigung endlicher Mengen selbst abzählbar, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Aufgabe 4 (3+3 Punkte)
Es seien X, Y zwei stochastisch unabhängige reelle Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Die Verteilungsfunktion von X und Y seien stetig. Zeigen Sie: $P(X = Y) = 0$.

b) Es gelte $X = Y$ P-fast sicher. Zeigen Sie, dass X und Y P-fast sicher konstant sind.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Es gilt

$$\begin{aligned} P(X = Y) \quad &= \quad P^X \otimes P^Y \left(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}\right) \\ &= \quad \int \mathbf{1}\{x = y\} \, dP^X \otimes P^Y(x, y) \\ &\overset{\text{Tonelli}}{=} \quad \int\int \mathbf{1}_{\{x\}}(y) \; P^Y(dy) \; P^X(dx) \;=\; \int \underbrace{P^Y(\{x\})}_{=\,0} \; P^X(dx) \;=\; 0\,. \end{aligned}$$

b) Lösung 1: Für $t \in \mathbb{R}$ gilt nach Voraussetzung

$$P(X \leq t, Y \leq t) \;=\; P(X \leq t) \cdot P(Y \leq t) \;=\; P(X \leq t) \cdot P(X \leq t),$$

andererseits ist $P(X \leq t, Y \leq t) = P(X \leq t, X \leq t) = P(X \leq t)$. Also gilt

$$P(X \leq t) \;=\; (P(X \leq t))^2,$$

und somit $P(X \leq t) \in \{0, 1\}$. Für $u := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) = 1\}$ gilt dann $u \in (-\infty, \infty)$ und $P(X = u) = 1$.

Lösung 2: Wegen $X \overset{P}{=} Y$ gilt $P^X = P^Y$. Damit und aus der Unabhängigkeit von X und Y folgt

$$\begin{aligned} 1 \;=\; P(X = Y) \;&=\; \int P^Y(\{x\}) \; P^X(dx) \\ &=\; \int P^X(\{x\}) P^X(dx) \;=\; \sum_{x : P(\{x\}) > 0} \left(P^X(\{x\})\right)^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Also existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $P^X(\{x\}) = 1$. Beim letzten Gleichheitszeichen in (1) ist zu beachten, dass

$$B \;=\; \left\{x \in \mathbb{R} : P^X(\{x\}) > 0\right\} \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R} : P^X(\{x\}) > \frac{1}{n}\right\}$$

abzählbar ist.

Aufgabe 5 (4+2 Punkte)
Es seien X_n, Y_n, $n \geq 1$, reelle Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sowie $(a_n)_{n\geq 1}$ eine beschränkte Zahlenfolge. Es gelte $X_n = O_P(1)$ und $Y_n = O_P(1)$ (d.h. die Mengen $\{P^{X_n} : n \geq 1\}$ und $\{P^{Y_n} : n \geq 1\}$ sind straff). Zeigen Sie:

a) $X_n + Y_n = O_P(1), \qquad X_n \cdot Y_n = O_P(1)$

b) $X_n + a_n = O_P(1), \qquad a_n \cdot X_n = O_P(1)$

Lösung zu Aufgabe 5

a) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $X_n = O_P(1)$ und $Y_n = O_P(1)$ existiert ein $k > 0$ mit

$$P(-k \leq X_n, Y_n \leq k) \;\geq\; 1 - \varepsilon \qquad \text{für jedes } n\ .$$

Es gilt

$$P(-2k \leq X_n + Y_n \leq 2k) \;\geq\; P(-k \leq X_n, Y_n \leq k) \;\geq\; 1 - \varepsilon$$

und

$$P(-k^2 \leq X_n \cdot Y_n \leq k^2) \;\geq\; P(-k \leq X_n, Y_n \leq k) \;\geq\; 1 - \varepsilon\ ,$$

woraus die Straffheit von $X_n + Y_n$ und $X_n \cdot Y_n$ folgt.

b) Definiere eine Folge von konstanten Zufallsvariablen $Z_n := a_n$, wobei $|a_n|$ beschränkt durch ein $k > 0$ ist. Dann gilt

$$P^{Z_n}([-k, k]) \;=\; 1 \;\geq\; 1 - \varepsilon \qquad \text{für jedes } \varepsilon > 0\ .$$

Somit folgt die Straffheit von $\left\{P^{Z_n} : n \geq 1\right\}$ sowie $Z_n = O_P(1)$. Mit Hilfe von a) folgt die Behauptung.

Aufgabe 6 (6 Punkte)
Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte positive Zufallsvariablen mit $\mu := E(X_1) > 0$ und $0 < \sigma^2 := V(X_1) < \infty$. Weiter sei $\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$. Zeigen Sie:

$$\sqrt{n}\left(\frac{\mu^2}{\overline{X}_n} - \overline{X}_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 4\sigma^2).$$

Lösung zu Aufgabe 6
Nach Voraussetzung ist $X_j > 0$ für $j \geq 1$ und somit $\overline{X}_n > 0$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}\left(\frac{\mu^2}{\overline{X}_n} - \overline{X}_n\right) &= \frac{\sqrt{n}}{\overline{X}_n}\left(\mu^2 - \overline{X}_n^2\right) = \frac{\sqrt{n}}{\overline{X}_n}\left(\mu - \overline{X}_n\right)\left(\mu + \overline{X}_n\right) \\
&= \frac{(-\sigma)\left(\mu + \overline{X}_n\right)}{\overline{X}_n} \cdot \frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mu\right)}{\sigma} \\
&= \underbrace{\frac{(-\sigma)(\mu + \overline{X}_n)}{\overline{X}_n}}_{\xrightarrow{\text{f.s.}} -2\sigma} \cdot \underbrace{\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j - n\,\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}}_{\xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)} \quad \xrightarrow{\mathcal{D}} \quad \mathcal{N}(0, 4\sigma^2)
\end{aligned}$$

nach dem Zentralen Grenzwertsatz, und da $\overline{X}_n$ nach dem starken Gesetz großer Zahlen fast sicher gegen $\mu > 0$ konvergiert.

Aufgabe 7 (6 Punkte)
Es sei $X = (X_1, \ldots, X_d)^T$ ein d–dimensionaler Zufallsvektor. φ_X bzw. φ_{X_j} bezeichne die charakteristische Funktion von X bzw. X_j. Zeigen Sie:

$$X_1, \ldots, X_d \text{ unabhängig} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi_X(t) = \prod_{j=1}^{d} \varphi_{X_j}(t_j) \quad \forall\, t = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d \; .$$

Lösung zu Aufgabe 7

„$\Rightarrow$“: Sind $X_1, \ldots, X_d$ unabhängig, so gilt dies nach dem Blockungslemma auch für $e^{it_1X_1}, \ldots, e^{it_dX_d}$. Daraus folgt für alle $t = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \varphi_X(t_1, \ldots, t_d) = E\left(e^{\left[i \sum\limits_{j=1}^{d} t_j X_j\right]}\right) \\ &= E\left(\prod_{j=1}^{d} e^{it_jX_j}\right) = \prod_{j=1}^{d} E\left(e^{it_jX_j}\right) = \prod_{j=1}^{d} \varphi_{X_j}(t_j). \end{aligned}$$

„$\Leftarrow$“: Seien umgekehrt $Y_1, \ldots, Y_d$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit $Y_j \sim X_j$ $(j = 1, \ldots, d)$ und $Y := (Y_1, \ldots, Y_d)$. Dann gilt $\varphi_{X_j} = \varphi_{Y_j}$ für alle $j = 1, \ldots, d$, und es folgt nach dem bereits bewiesenen Teil „$\Rightarrow$“ sowie nach Voraussetzung

$$\varphi_Y(t_1, \ldots, t_d) \overset{\text{„}\Rightarrow\text{“}}{=} \prod_{j=1}^{d} \varphi_{Y_j}(t_j) = \prod_{j=1}^{d} \varphi_{X_j}(t_j) \overset{\text{Vor.}}{=} \varphi_X(t_1, \ldots, t_d) \; .$$

Nach dem Eindeutigkeitssatz folgt $P^X = P^Y$, und insbesondere sind $X_1, \ldots, X_d$ stochastisch unabhängig.

Aufgabe 8 (7 Punkte)
Die Zufallsvariablen T_1 und T_2 seien unabhängig und jeweils exponentialverteilt mit Parametern λ_1 und λ_2. Wir setzen $X := \min(T_1, T_2)$. Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von X gegeben T_1 und berechnen Sie $E[X|T_1]$.

Hinweis: $\int_0^t x\lambda e^{-\lambda x}\, dx = -te^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t}\right), \quad (t > 0, \lambda > 0).$

Lösung zu Aufgabe 8
Es gilt

$$P(X = T_1 \mid T_1 = t_1) \;=\; P(T_2 > T_1 \mid T_1 = t_1) \;=\; P(T_2 > t_1 \mid T_1 = t_1) = P(T_2 > t_1) \;=\; e^{-\lambda_2 t_1}$$

und für $0 \leq x < t_1$

$$P(X \leq x \mid T_1 = t_1) \;=\; P(T_2 \leq x \mid T_1 = t_1) \;=\; P(T_2 \leq x) \;=\; 1 - e^{-\lambda_2 x}.$$

Also hat die Verteilung von X gegeben $T_1 = t_1$ Masse $e^{-\lambda_2 t_1}$ auf t_1 und Lebesgue-Dichte $\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}$ auf $[0, t_1)$. Deshalb gilt

$$\begin{aligned}
E[X|T_1 = t_1] &= \int x\, P^{X|T_1=t_1}(t_1, dx) \;=\; t_1 e^{-\lambda_2 t_1} + \int_0^{t_1} x\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}\, dx \\
&= t_1 e^{-\lambda_2 t_1} - t_1 e^{-\lambda_2 t_1} + \frac{1}{\lambda_2}\left(1 - e^{-\lambda_2 t_1}\right) \\
&= \frac{1}{\lambda_2}(1 - e^{-\lambda_2 t_1})
\end{aligned}$$

bzw.

$$E[X|T_1] \;=\; \frac{1}{\lambda_2}(1 - e^{-\lambda_2 T_1})$$