Universität Karlsruhe
Institut für Stochastik

Prof. Dr. G. Last
Dipl.-Math. D. Gentner

Stochastische Geometrie (SS 09)

Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Es sei $(\mathbb{X}, \rho)$ ein separabler metrischer Raum. Zeigen Sie, dass es eine Folge messbarer Teilmenge $B_{n,i}$, $n, i \in \mathbb{N}$, von $\mathbb{X}$ gibt mit der Eigenschaft, dass für jedes n durch $B_{n,i}$, $i \in \mathbb{N}$, eine Partition von $\mathbb{X}$ gegeben ist mit der Eigenschaft

$$\sup_i \rho(B_{n,i}) \to 0, \quad n \to \infty,$$

wobei $\rho(A) := \sup\{\rho(x,y) : x, y \in A\}$ für $A \subset \mathbb{X}$.

Aufgabe 2

Es sei $(S, \mathcal{S})$ ein Messraum und M der Raum aller Maße auf S, versehen mit der von allen Projektionsabbildungen der Form

$$\pi_B : M \to \mathbb{R}, \quad \mu \mapsto \mu(B), \quad B \in \mathcal{S},$$

erzeugten σ-Algebra. Ferner sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Ein *zufälliges Maß* ist eine messbare Abbildung $\xi : \Omega \to M$. Zeigen Sie:
ξ ist genau dann ein zufälliges Maß, falls für jedes $B \in \mathcal{S}$ $\xi(B)$ eine Zufallsvariable ist und ferner für jedes $\omega \in \Omega$ $\xi(\omega, \cdot) := \xi(\omega)(\cdot)$ ein Maß ist.

Aufgabe 3

Es seien X_1, X_2 u.i.v. und gleichverteilt auf der Einheitskreisscheibe im $\mathbb{R}^2$, X_3 gleichverteilt auf der Menge $\{(-1,-1), (-1,1), (1,-1), (1,1)\}$ und X_4 gleichverteilt auf dem Segment $[-1,1] \times \{0\}$. Ferner sei der Punktprozess ξ gegeben durch

$$\xi := \sum_{i=1}^{4} \delta_{X_i}.$$

Berechnen Sie dessen Intensitätsmaß $\Lambda := \mathbb{E}\xi$ und

$$\mathbb{E} \int_{[-1,1]^2} x^2 + y^2 \xi(d(x,y)).$$

Aufgabe 4

Es seien $X_1, X_2, X_3, ...$ u.i.v. Zufallsvariablen im $\mathbb{R}^d$ mit Verteilung V und η eine von den X_i unabhängige $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable. Der Punktprozess ξ sei gegeben durch

$$\xi := \sum_{i=1}^{\eta} \delta_{X_i}.$$

Berechnen Sie dessen Intensitätsmaß $\Lambda := \mathbb{E}\xi$.