Universität Karlsruhe
Institut für Stochastik

Prof. Dr. G. Last
Dipl.-Math. D. Gentner

Stochastische Geometrie (SS 09)

Übungsblatt 2

Aufgabe 1

(a) Sei $X \sim \text{Poiss}(\lambda)$, wobei $\lambda > 0$. Berechnen Sie $\mathbb{E}X$ und $\text{Var}(X)$.

(b) Sei ξ ein Poissonprozess auf $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ mit Intensitätsmaß Λ und $A, B \in \mathcal{X}$. Zeigen Sie, dass

$$\text{Cov}(\xi(A), \xi(B)) = \Lambda(A \cap B).$$

Aufgabe 2

(a) Sei ξ ein gemischter Binomialprozess auf $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$, d.h.

$$\xi = \sum_{i=1}^{\nu} \delta_{X_i}$$

mit unabhängigen, identisch verteilten Zufallselementen $X_1, X_2, ... \in \mathbb{X}$ in $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ mit Verteilung V und davon unabhängigem, $\mathbb{N}_0$-wertigen ν mit der Eigenschaft $\mathbb{P}(\nu > 1) > 0$. Zeigen Sie:

$$\xi \text{ einfach} \Leftrightarrow V(\{x\}) = 0, \quad x \in \mathbb{X}.$$

(b) Sei nun ξ ein Poissonprozess auf $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ mit lokal-endlichem Intensitätsmaß Λ. Zeigen Sie:

$$\xi \text{ einfach} \Leftrightarrow \Lambda(\{x\}) = 0, \quad x \in \mathbb{X}.$$

Aufgabe 3

Sei ξ ein gemischter Binomialprozess wie in Aufgabe 2. Zeigen Sie: $\nu \sim \text{Poiss}(\lambda)$ für ein $\lambda > 0$ genau dann wenn

$$\mathbb{E} \int f(\xi \setminus \delta_x, x)\xi(dx) = \lambda \mathbb{E} \int f(\xi, x)V(dx), \quad f \in F_+(N(\mathbb{X}) \times \mathbb{X}),$$

wobei

$$\xi \setminus \delta_x := \begin{cases} \xi - \delta_x, & \xi(\{x\}) > 0, \\ \xi, & \xi(\{x\}) = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 4

Sei ξ ein homogener Poissonprozess im $\mathbb{R}^d$, d.h. $\Lambda := \mathbb{E}\xi = c \cdot \lambda$ für ein $c > 0$ (λ bezeichnet d-dimensionales Lebesguemaß). Ferner sei

$$d_\xi := \inf\{||x|| : x \in \xi\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass d_ξ eine Zufallsvariable ist und bestimmen Sie deren Verteilung.

(b) H bezeichne deren Verteilungsfunktion. Zeigen Sie:

$$H(r) = \lim_{\epsilon \to 0} \mathbb{P}(\xi(B(0,r)) \geq 2 | \xi(B(0,\epsilon)) = 1),$$

wobei $B(0,s)$ die abgeschlossene Kugel um den Ursprung mit Radius s bezeichnet.