Universität Karlsruhe
Institut für Stochastik

Prof. Dr. G. Last
Dipl.-Math. D. Gentner

Stochastische Geometrie (SS 09)

Übungsblatt 3

Aufgabe 1

Für $i = 1, 2, ..., n$ seien ξ_i unabhängige Punktprozesse auf $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ mit Intensitätsmaß Λ_i und charakteristischem Funktional

$$G_i(f) := \mathbb{E} \exp[-\int f(x) \xi_i(dx)].$$

(a) Drücken Sie das Intensitätsmaß Λ bzw. das charakteristische Funktional G der *Überlagerung* $\xi := \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$ der n Punktprozesse als Funktion der Λ_i bzw. G_i aus.

(b) Zeigen Sie einerseits unter Verwendung des charakteristischen Funktionals und andererseits direkt, dass die Überlagerung von n Poissonprozessen $\xi_1, ..., \xi_n$ mit jeweils lokal-endlichen Intensitätsmaßen $\Lambda_1, ..., \Lambda_n$ wieder ein Poissonprozess ist.

Aufgabe 2

Es sei $p : \mathbb{X} \to [0, 1]$ messbar, ξ ein Punktprozess auf $\mathbb{X}$ und ξ_p die p-Verdünnung von ξ.

(a) Es sei $A \in \mathcal{X}$. Zu ξ sei $\xi_A := \xi(\cdot \cap A)$ die *Restriktion* von ξ auf A. Kann man ξ_A als eine p-Verdünnung von ξ interpretieren? Falls ja, wie muss $p(x)$ dazu gewählt werden?

(b) Zeigen Sie, dass sich ξ stets für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ als Überlagerung geeigneter identisch verteilter Punktprozesse $\xi_1, ..., \xi_n$ schreiben lässt mit der Eigenschaft

$$\mathbb{P}(\xi_i(\mathbb{X}) \geq 1) > 0, \quad i = 1, ..., n.$$

(c) Zeigen Sie, dass (b) falsch wird, wenn man zusätzlich fordert, dass die ξ_i unabhängig sein sollen.

(d) Punktprozesse ξ die sich für jedes $n \in \mathbb{N}$ wie in Teil (c) schreiben lassen, nennt man *unbegrenzt teilbar*. Zeigen Sie, dass ein Poissonprozess ξ mit Intensitätsmaß Λ unbegrenzt teilbar ist.

(e) Es seien nun speziell $\xi_1 \stackrel{d}{=} \xi_2 \stackrel{d}{=} \cdots \stackrel{d}{=} \xi_n$ unabhängige Punktprozesse auf $\mathbb{X}$ und $\xi := \xi_1 + ... + \xi_n$. Geben Sie ein Beispiel das zeigt, weshalb

$$\xi_{\frac{1}{n}} \stackrel{d}{=} \xi_1$$

im Allgemeinen falsch ist.

(f) Zeigen Sie, dass falls die ξ_i unabhängige identisch verteilte Poissonprozesse sind, die Gleichung aus Teil (e) richtig ist und dass $\xi_{\frac{1}{n}}$ nicht unabhängig zu ξ_1 ist.

Aufgabe 3

Es sei $\mathcal{F}^d$ wie in der Vorlesung versehen mit der Fell-Topologie. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}^d$ ein kompakter Hausdorffraum ist. (Man kann zusätzlich zeigen, dass $\mathcal{F}^d$ dem 2. Abzählbarkeitsaxiom genügt, dass $\mathcal{F}^d \setminus \{\emptyset\}$ bezüglich der Spurtopologie zumindest noch lokal-kompakt ist, und dass $\mathcal{F}^d$ gerade die Alexandroff-Kompaktifizierung von $\mathcal{F}^d \setminus \{\emptyset\}$ ist.)

Aufgabe 4

Es sei Z eine zufällige abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}^d$ mit Kapazitätsfunktional T_Z. Beweisen Sie:

(a) $0 \leq T_Z \leq 1, T_Z(\emptyset) = 0$,

(b) $K_n \downarrow K \Rightarrow T_Z(K_n) \to T_Z(K)$,

(c) für S_k rekursiv definiert durch $S_0(K) := 1 - T_Z(K)$ und

$$S_k(C_0; C_1, ..., C_k) := S_{k-1}(C_0; C_1, ..., C_{k-1}) - S_{k-1}(C_0 \cup C_k; C_1, ..., C_{k-1}), \quad k \geq 1,$$

gilt

$$S_k(C_0; C_1, ..., C_k) = \mathbb{P}(Z \cap C_0 = \emptyset, Z \cap C_1 \neq \emptyset, ..., Z \cap C_k \neq \emptyset), \quad k \geq 0.$$