Universität Karlsruhe
Institut für Stochastik

Prof. Dr. G. Last
Dipl.-Math. D. Gentner

Stochastische Geometrie (SS 09)

Übungsblatt 4

Aufgabe 1

(a) Es seien die S_k definiert wie in Blatt 3, Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass für $k \geq 1$

$$S_k(B_0; B_1, \ldots, B_k) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq k} S_0(B_0 \cup B_{i_1} \cup \cdots \cup B_{i_r}).$$

(b) Sei N ein einfacher Punktprozess auf einer endlichen Menge $\mathbb{X}$. Definiere

$$p(F) := \mathbb{P}(N = F), \quad F \subset \mathbb{X},$$
$$c(F) := \mathbb{P}(N \subset F), \quad F \subset \mathbb{X}.$$

Dann ist

$$c(F) = \sum_{K \subset F} p(K).$$

Zeigen Sie die Möbius-Inversionsformel

$$p(F) = \sum_{K \subset F} (-1)^{\operatorname{card}(F \setminus K)} c(K), \quad F \subset \mathbb{X}.$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die bezüglich der Fell-Topologie Borelsche σ-Algebra auf $\mathcal{F}^d$ erzeugt wird durch jedes der folgenden Mengensysteme:

(a) $\{\mathcal{F}^{d,C} : C \in \mathcal{C}^d\}$

(b) $\{\mathcal{F}^d_C : C \in \mathcal{C}^d\}$

(c) $\{\mathcal{F}^{d,G} : G \subset \mathbb{R}^d \text{ offen}\}$

(d) $\{\mathcal{F}^d_G : G \subset \mathbb{R}^d \text{ offen}\}$

Aufgabe 3

Es sei $R \geq 0$ eine Zufallsvariable und sei $Z_0 := B(0, R)$. Man zeige:

(a) Z_0 ist eine zufällige abgeschlossene Menge.

(b) Die Bedingung

$$\mathbb{E}V_d(Z_0 + K) < \infty, \quad K \in \mathcal{C}^d,$$

ist äquivalent zu

$$\mathbb{E}R^d < \infty.$$

Aufgabe 4

Es sei $\mathcal{C}' := \mathcal{C}^d \setminus \{\emptyset\}$ und

$$d : \mathcal{C}' \times \mathcal{C}' \to [0, \infty)$$

die Hausdorff-Metrik. Seien $K, K', L, L' \in \mathcal{C}'$. Zeigen Sie:

(a) Zeigen Sie, dass d tatsächlich eine Metrik auf $\mathcal{C}'$ ist.

(b) $d(\mathrm{conv}K, \mathrm{conv}L) \le d(K, L)$

(c) $d(K + K', L + L') \le d(K, L) + d(K', L')$

(d) $d(K \cup K', L \cup L') \le d(K, L) \vee d(K', L')$

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass

$$\mathrm{conv}(A + B) = \mathrm{conv}(A) + \mathrm{conv}(B), \quad A, B \subset \mathbb{R}^d.$$