Universität Karlsruhe
Institut für Stochastik

Prof. Dr. G. Last
Dipl.-Math. D. Gentner

Stochastische Geometrie (SS 09)

Übungsblatt 5

Aufgabe 1

Es sei Z das Boolsche Modell im $\mathbb{R}^2$ mit Intensität γ und der trivialen Kornverteilung $\mathbb{Q} := \delta_{B(0,1)}$, welche mit Wahrscheinlichkeit 1 den Einheitsball wählt. Wir nennen einen Punkt $z \in Z$ *sichtbar*, falls

$$|\{X_i : z \in X_i + Z_i\}| = 1$$

gilt, falls also z in genau einem Partikel des Boolschen Modells enthalten ist. Zeigen Sie, dass

$$\tilde{X} := \{X_i : X_i \text{ ist sichtbar}\}$$

ein stationärer Punktprozess mit Intensität $\tilde{\gamma} = \gamma e^{-\pi\gamma}$ ist. Ist $\tilde{X}$ ein Poissonprozess?

Aufgabe 2

Die Drehgruppe SO_d kann bekanntlich mit der Matrixgruppe $SO(d)$ identifiziert werden. Ist I die Einheitsmatrix, so ist die $SO(d)$ gegeben durch

$$SO(d) := \{A \in GL(n) : AA^t = I \wedge \det(A) = 1\}.$$

Wir wollen in dieser Aufgabe sehen, dass SO_d mit dieser Identifizierung auf natürliche Weise zu einer kompakten topologischen Gruppe wird.

(a) Fassen Sie $SO(d)$ geeignet als Teilmenge des $\mathbb{R}^{n^2}$ auf. Zeigen Sie, dass $SO(d)$ versehen mit der Spurtopologie ein kompakter Hausdorffraum mit abzählbarer Basis ist.

(b) Zeigen Sie, dass Inversenbildung und Multiplikation in $SO(d)$ stetig sind.

Es ist bekannt, dass auf kompakten topologischen Hausdorffgruppen G ein Haar'sches Wahrscheinlichkeitsmaß existiert, d.h. ein Maß ν mit $\nu(G) = 1$ und

$$\nu(gA) = \nu(A), \quad A \in \mathcal{B}(G), g \in G.$$

Eine explizite Konstruktion dieses Maßes findet sich z.B. in Schneider/Weil *Stochastic and Integral Geometry* Theorem 13.2.9.
Es sei nun Z eine zufällige abgeschlossene Menge im $\mathbb{R}^d$ und U eine von Z unabhängige zufällige Rotation (d.h. ein zufälliges Element aus SO_d).

(c) Zeigen Sie, dass falls Z stationär ist, dann auch UZ stationär ist.

(d) ν sei das Haar'sche Maß auf SO_d. Beweisen Sie, dass falls U Verteilung ν besitzt, die ZAM UZ isotrop ist.

Aufgabe 3

Wir betrachten ein Boolsches Modell mit typischem Korn Z_0 mit der Eigenschaft

$$V_d(\partial Z_0) = 0, \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}.$$

Zeigen Sie folgende Stetigkeitseigenschaft der Kovarianzfunktion C des Boolschen Modells:

$$\lim_{x \to 0} C(x) = p,$$

wobei p der Volumenanteil des Boolschen Modells ist.

Aufgabe 4

Es sei Z eine stationäre ZAM im $\mathbb{R}^d$ und $p(Z) := \mathbb{P}(0 \in Z)$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ gilt, dass

$$\mathbb{E}V_d(Z \cap B) = p(Z)V_d(B).$$

(b) Es sei nun $p(Z) < 1$. Zeigen Sie, dass die Kontaktverteilungsfunktion H_B zu einem Eichkörper $B \in \mathcal{K}_0^d$ durch die Formel

$$H_B(r) = \frac{p(Z + rB^*) - p(Z)}{1 - p(Z)}, \quad r > 0,$$

gegeben ist.