Universität Karlsruhe
Institut für Stochastik

Prof. Dr. G. Last
Dipl.-Math. D. Gentner

Stochastische Geometrie (SS 09)

Übungsblatt 7

Aufgabe 1

(a) Es sei $C \in \mathcal{C}^d$ nicht leer. Zeigen Sie, dass es unter allen Kugeln der Form

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^d : ||y-x|| \leq r\}, \quad x \in \mathbb{R}^d, r \geq 0,$$

welche C enthalten, eine eindeutig bestimmte Kugel U_C mit kleinstem Radius gibt. (Diese nennen wir *Umkugel*).

(b) Es sei $r(C)$ der Radius von U_C. Zeigen Sie, dass die Abbildung $r : \mathcal{C}^d \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{R}$ stetig ist bezüglich der Hausdorff-Metrik.

(c) Es sei $c(C)$ der Mittelpunkt von U_C. Zeigen Sie, dass die Abbildung $c : \mathcal{C}^d \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{R}^d$ stetig ist bezüglich der Hausdorff-Metrik.

Aufgabe 2

Sei ξ ein stationärer Partikelprozess mit lokal-endlichem Intensitätsmaß $\Lambda \neq 0$ und $c : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^d$ eine fest gewählte kovariante Zentrumsfunktion, bezüglich der wir

$$\mathcal{C}_0 := \{K \in \mathcal{C}^d : c(K) = 0\}$$

setzen. Nach Satz 3.5.7 der Vorlesung gibt es dann ein eindeutig bestimmtes $\gamma > 0$ und ein eindeutig bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $\mathcal{F}'$ mit $\mathbb{Q}(\mathcal{C}_0) = 1$, so dass

$$\Lambda(H) = \gamma \iint \mathbb{1}\{K + x \in H\}\mathbb{Q}(dK)dx, \quad H \in \mathcal{B}(\mathcal{F}').$$

Im Beweis wurde

$$\gamma := \mathbb{E} \int \mathbb{1}\{c(K) \in [0,1)^d\}\xi(dK)$$

gefunden.

(a) Zeigen Sie, dass γ unabhängig von c ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ jedoch von c abhängt.

(c) Zeigen Sie, dass für messbare Teilmengen $H \subset \mathcal{F}'$ mit der Eigenschaft

$$H + x = H, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

gilt, dass $\mathbb{Q}(H)$ nicht von c abhängt.