Universität Karlsruhe
Institut für Stochastik

Prof. Dr. G. Last
Dipl.-Math. D. Gentner

Stochastische Geometrie (SS 09)

Übungsblatt 8

Aufgabe 1

Es sei ξ ein Poissonprozess auf $\mathbb{X}$ mit Intensitätsmaß Λ und $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}'$ eine messbare Abbildung mit der Eigenschaft, dass

$$\Lambda' := \Lambda \circ T^{-1} \text{ lokal-endlich} \tag{1}$$

ist. Dann besagt das *Abbildungsprinzip*, dass $\eta := \xi \circ T^{-1}$ ein Poissonprozess auf $\mathbb{X}'$ mit Intensitätsmaß $\Lambda' = \Lambda \circ T^{-1}$ ist.

(a) Überlegen Sie sich ein Beispiel, an dem klar wird, weshalb (1) nicht entbehrlich ist.

(b) Es sei nun ξ ein homogener Poissonprozess auf $\mathbb{R}^d$ mit Intensität γ und $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_{\geq 0} \times S^{d-1}$ definiert durch $T(0) := (0, e_1)$ und für $x \neq 0$ durch $T(x) := (||x||, \frac{x}{||x||})$. Bestimmen Sie das Intensitätsmaß Λ' des induzierten Poissonprozesses η auf $\mathbb{R}_{\geq 0} \times S^{d-1}$.

Aufgabe 2

Wir betrachten einen stationären unabhängig markierten Punktprozess η im $\mathbb{R}^d$ mit Markenraum $\mathcal{C}'$ und Markenverteilung $\mathbb{Q}$, so dass

$$\int V_d(K + C)\; Q(dK) < \infty, \quad C \in \mathcal{C}'.$$

Zeigen Sie, dass dann

$$\xi := \int 1\{K + x \in \cdot\}\eta(d(x, K))$$

ein stationärer Partikelprozess ist.

Aufgabe 3

Es sei ξ ein stationärer Punktprozess im $\mathbb{R}^d$.

(a) Es ist bekannt, dass $\Lambda_\xi := \mathbb{E}\xi$ ein Vielfaches des Lebesguemaßes ist. Gilt auch die Umkehrung? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Sei weiter $\mathbb{Y}$ ein Markenraum, K ein stochastischer Kern von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{Y}$ und η eine K-Markierung von ξ. Zeigen Sie:

(b) Falls η stationär ist, so gilt $K(x, \cdot) = \mathbb{Q}$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$, wobei $\mathbb{Q}$ ein festes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{Y}$ ist.

(c) Gilt in (b) die Umkehrung? (Beweis oder Gegenbeispiel)