Universität Karlsruhe
Institut für Stochastik

Prof. Dr. G. Last
Dipl.-Math. D. Gentner

Stochastische Geometrie (SS 09)

Übungsblatt 9

Aufgabe 1

Es sei $\mathbb{P}_\eta^0$ das Palmsche Wahrscheinlichkeitsmaß eines stationären Punktprozesses η im $\mathbb{R}^d$ mit endlicher Intensität. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}_\eta^0(\{\mu : \mu(\{0\}) > 0\}) = 1.$$

Aufgabe 2

Es sei $\xi = \{X_n : n \geq 1\}$ ein stationärer Punktprozess im $\mathbb{R}^d$ und $Z_1, Z_2, ...$ eine uiv Folge kompakter Mengen, so dass $(Z_n)_{n\geq 1}$ unabhängig von ξ ist mit der Eigenschaft

$$\mathbb{E}V_d(Z_0 + K) < \infty, \quad K \in \mathcal{C}^d.$$

Zeigen Sie, dass

$$Z := \bigcup_{n\geq 1} Z_n + X_n$$

eine stationäre ZAM ist.

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie, dass

$$\xi := \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \delta_{(i,j)-U}, \quad U \sim \mathrm{Unif}([0,1)^2)$$

ein stationärer Punktprozess mit Intensität 1 im $\mathbb{R}^2$ ist und berechnen Sie dessen Palmsches Wahrscheinlichkeitsmaß.

(b) Zeigen Sie, dass ξ ergodisch ist.

(c) Folgern Sie aus dem Ergodensatz 4.3.10, dass

$$\frac{\xi(B_n)}{V_d(B_n)} \to 1, \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

für jede aufsteigende Folge konvexer Mengen mit $B_n \uparrow \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 4

(a) Zeigen Sie, dass

$$\xi := \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} P_{(i,j)}\delta_{(i,j)-U}, \quad U \sim \mathrm{Unif}([0,1)^2), P_{(i,j)} \sim \mathrm{Ber}(p),$$

ein wobei U und $(P_{(i,j)})$ unabhängig seien, ein stationärer Punktprozess mit Intensität p im $\mathbb{R}^2$ ist und berechnen Sie dessen Palmsches Wahrscheinlichkeitsmaß.

(b) Entscheiden Sie, ob ξ ergodisch ist.