Universität Karlsruhe
Institut für Stochastik

Prof. Dr. G. Last
Dipl.-Math. D. Gentner

Stochastische Geometrie (SS 09)

Übungsblatt 10

Aufgabe 1

Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir definieren eine Abbildung $T_a : [0,1] \to [0,1]$ durch

$$T_a(s) := s + a \pmod 1.$$

Sei ξ gleichverteilt auf $[0,1]$. Wir betrachten die in natürlicher Weise von T induzierte Operation von $\mathbb{Z}$ auf $[0,1]$, gegeben durch

$$zs := T_{za}s = T_a^z(s).$$

(a) Zeigen Sie, dass ξ T_a-stationär ist, dass also

$$\mathbb{P}(T_{za}\xi \in \cdot) = \mathbb{P}(\xi \in \cdot), \quad z \in \mathbb{Z}.$$

(b) Warum ist

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\xi \in A, T_{na}\xi \in B) = \mathbb{P}(\xi \in A)\mathbb{P}(\xi \in B), \quad A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$

für jedes $a \in \mathbb{R}$ falsch? (ξ ist also niemals T_a-mischend.)
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $a \notin \mathbb{Q} \Leftrightarrow \{na (\mathrm{mod}\ 1) : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $[0,1]$.

(c) Wir nennen ξ T_a-ergodisch, falls $\mathbb{P}(\xi \in A) \in \{0,1\}$ ist für alle T_a-invarianten $A \in \mathcal{B}([0,1])$. Zeigen Sie:

$$\xi \text{ ist } T_a\text{-ergodisch} \quad \Leftrightarrow \quad a \notin \mathbb{Q}.$$

Aufgabe 2

Sei η ein Punktprozess im $\mathbb{R}^d$. N_f sei die Menge aller einfachen endlichen Zählmaße auf dem $\mathbb{R}^d$ mit der Spur-σ-Algebra von N_s und $\mathbb{Q}$ sei eine Verteilung auf N_f. Sei nun $\tilde{\eta}$ eine unabhängige $\mathbb{Q}$-Markierung von η. Wir definieren weiter den von η und $\mathbb{Q}$ erzeugten *Clusterprozess* als

$$\eta' := \sum_{(x,\mu)\in\tilde{\eta}} T_x\mu.$$

Ein zufälliges Element Z_0 aus N_f mit Verteilung $\mathbb{Q}$ nennen wir auch *typischen Cluster* von η' und $\gamma_0 := \mathbb{E}(Z_0(\mathbb{R}^d))$ dessen erwartete Teilchenzahl. Sei nun η stationär mit endlicher Intensität γ_η und $\gamma_0 < \infty$. Zeigen Sie:

(a) η' ist stationär;

(b) $\mathbb{E}\eta'[0,1]^d = \gamma_\eta \cdot \gamma_0$;

(c) Ist η ein homogener Poissonprozess und der typische Cluster f.s. enthalten in einer kompakten Menge C_0, so ist η' mischend (und insbesondere ergodisch).