Universität Karlsruhe
Institut für Stochastik

Prof. Dr. G. Last
Dipl.-Math. D. Gentner

Stochastische Geometrie (SS 09)

Übungsblatt 11

Aufgabe 1

Es sei $\mathcal{R}^d$ der Konvexring. Beweisen Sie für ein additives Funktional $\varphi : \mathcal{R}^d \to [0, \infty)$ das *Inklusions-Exklusionsprinzip*, d.h. die Formel

$$\varphi(\bigcup_{i=1}^{m} C_i) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq m} \varphi(C_{i_1} \cap ... \cap C_{i_k}), \quad m \in \mathbb{N}, \quad C_1, ..., C_m \in \mathcal{R}^d.$$

Aufgabe 2

Sei $K \in \mathcal{K}$ ein konvexer Körper. Die *metrische Projektion* auf K ist die Abbildung $p_K : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, welche jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ den nächstgelegenen Punkt in K zuordnet. Zeigen Sie, dass p_K Lipschitz-stetig mit (kleinstmöglicher) Lipschitz-Konstante 1 ist.

Aufgabe 3

Es sei ξ ein stationärer Punktprozess im $\mathbb{R}^d$ mit endlicher Intensität γ und $\mathbb{P}^0_\xi$ das Palmsche Wahrscheinlichkeitsmaß von ξ.

(a) Zeigen Sie, dass die Verteilung von ξ außerhalb der Menge $\{0\}$ (0 bezeichnet das Nullmaß) vollständig mittels $\mathbb{P}^0_\xi$ rekonstruiert werden kann. Gehen Sie dabei wie folgt vor: Konstruieren Sie eine messbare Funktion $h : \mathbb{R}^d \times N(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$ mit der Eigenschaft, dass $\int h(x, \mu)\mu(dx) = 1$ ist, sofern μ nicht das 0-Maß ist. Verwenden Sie dieses h, um die Verteilung von ξ aus der definierenden Gleichung des Palmsches Maßes zu extrahieren.

(b) Folgern Sie, dass zwei stationäre Punktprozesse ξ und η mit endlichen Intensitäten und der Eigenschaft, dass beide fast sicher nicht das Nullmaß sind, genau dann die selbe Verteilung besitzen, wenn deren Palmsche Wahrscheinlichkeitsmaße übereinstimmen.